



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# PRUŽNOST A PLASTICITA

## ENERGETICKÉ METODY

SHRNUTÍ TEORIE A PŘÍKLADY

Ing. Rostislav Zídek, Ph.D.

Ing. Luděk Brdečko, Ph.D.

2014

## Obsah

1.	Předmluva .....	3
2.	Deformační (přetvárná) práce.....	4
2.1.	Přetvárná práce vnějších sil.....	4
2.2.	Deformační (přetvárná) práce napětí.....	13
2.3.	Deformační práce soustavy .....	15
3.	Virtuální práce .....	19
3.1.	Princip superpozice mechanické práce .....	22
4.	Potenciální energie.....	25
4.1.	Potenciální energie vnějších sil .....	25
4.2.	Potenciální energie vnitřních sil (deformační energie) .....	25
4.3.	Potenciální energie systému .....	25
5.	Variační úlohy.....	29
5.1.	Ritzova metoda.....	30
5.1.1.	Obecná úprava řešení Ritzovou metodou.....	34
5.2.	Metoda konečných prvků.....	47
5.2.1.	Prutový prvek tah - tlak .....	47
5.2.2.	Odvození prutového MKP prvku tah-tlak maticově .....	49
5.2.3.	Výpočet vnitřních sil pro prutový prvek tah – tlak .....	53
5.2.4.	Plošný prvek T6.....	54
5.2.5.	Aplikace prvku T6 .....	60
5.2.6.	Zadaná přemístění a pružné podpory .....	68
6.	Dodatek A - přetvárná práce vnitřních sil na prutu.....	73
7.	Dodatek B - extrém funkce a funkcionálu .....	79
7.1.	O problému extrému obecně .....	79
7.2.	Stacionární hodnota funkce .....	80
7.3.	Variace funkce a stacionární hodnota.....	80
8.	Dodatek C – Požadavky na náhradní funkce pro prvky MKP.....	83
9.	Literatura.....	86

## 1. Předmluva

Předkládaná cvičebnice se pokouší zaplnit mezeru ve výuce metody konečných prvků a obecně energetických metod. Problematika je to značně rozsáhlá a pro dobré pochopení je třeba začít od nejjednodušších úvah o energiích. V předkládaném textu je proto vždy stručně uvedena teorie, na kterou navazují příklady, včetně jejich numerického řešení. V dodatcích jsou potom shrnuty některé principiální záležitosti, jejichž obšírné uvedení v hlavním textu by nebylo ve prospěch přehlednosti.

Efektivní studium energetických metod předpokládá aktivní zapojení se studenta do procesu. Doporučujeme číst skriptum s tužkou v ruce a zapnutým počítačem v dosahu. Některé příklady jsou totiž numericky náročné a je efektivní řešit je za pomoci tabulkového procesoru (MS Excel, OpenOffice Calc, či jiný).

Výklad je podán co nejjednodušší formou, tak, aby byl co nejpřístupnější široké čtenářské obci. Autoři neměli ambici napsat vědecký text, ale snažili se vysvětlit i složitější metody pomocí základní matematiky. Proto je přetvárná práce vnějších sil nejprve vysvětlena na konečném počtu dílčích zatížení a teprve potom je celá úvaha převedena na integrál. Podobně je bytostně maticová metoda konečných prvků nejprve vysvětlena bez použití matic, které jsou poté implementovány jako vítané uspořádání a v konečném důsledku zjednodušení výpočtu.

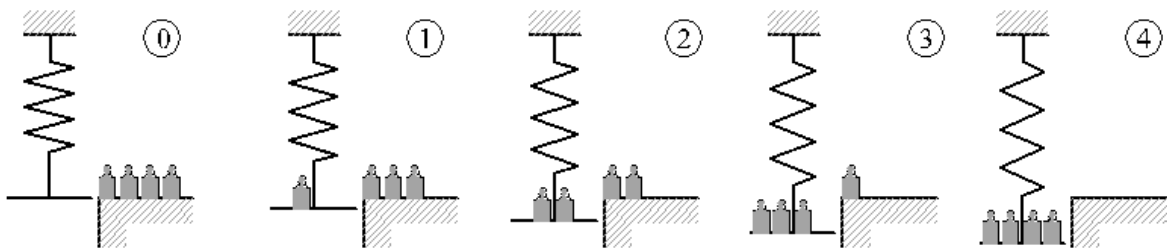
Autoři touto cestou děkují Doc. Ing. Svatopluku Šmiřákovi, CSc. za inspiraci a za skvělý výklad ve skriptu [1], na který se pokusili navázat. Všem čtenářům potom budou vděčni za věcné připomínky a upozornění na chyby.

Brno, prosinec 2014

## 2. Deformační (přetvárná) práce

### 2.1. Přetvárná práce vnějších sil

Proměnné vnější síly konají na poddajném tělese práci. Z fyziky víme, že mechanická práce se vypočte jako součin síly a dráhy, na které síla působí. Problém v případě poddajných těles spočívá v závislosti síly na deformaci tělesa. Na obrázku 1 je proces zatížení pružiny rozfázován do čtyř kroků.



Obrázek 1: Postup zatěžování

Mechanickou práci můžeme, za předpokladu čtyř stejných zatěžovacích kroků, vyjádřit pro zatěžovací krok 1 jako

$$L_{e,1} = F_1 u_1 = \frac{1}{4} F \frac{1}{4} u = \frac{1}{16} Fu, \quad (1)$$

kde  $F$  a  $u$  jsou konečné hodnoty působící síly a posunu.

Ve druhém kroku můžeme psát

$$L_{e,2} = F_1 u_1 + F_1 + F_2 u_2 = \frac{1}{4} F \frac{1}{4} u + \frac{2}{4} F \frac{1}{4} u = \frac{3}{16} Fu. \quad (2)$$

Pro třetí krok obdobně dostaneme

$$L_{e,3} = F_1 u_1 + F_1 + F_2 u_2 + F_1 + F_2 + F_3 u_3 = \frac{1}{4} F \frac{1}{4} u + \frac{2}{4} F \frac{1}{4} u + \frac{3}{4} F \frac{1}{4} u = \frac{3}{8} Fu. \quad (3)$$

A obdobně ve čtvrtém, posledním, kroku

$$\begin{aligned} L_{e,4} &= F_1 u_1 + F_1 + F_2 u_2 + F_1 + F_2 + F_3 u_3 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 u_4 \\ &= \frac{1}{4} F \frac{1}{4} u + \frac{2}{4} F \frac{1}{4} u + \frac{3}{4} F \frac{1}{4} u + \frac{4}{4} F \frac{1}{4} u = \frac{10}{16} Fu = 0,625 Fu \end{aligned} \quad (4)$$

Obecně můžeme psát pro zatěžovací proces rozdělený na  $n$  částí

$$L_{e,n} = \sum_{i=1}^n i Fu = \frac{1}{2} n(n+1) Fu, \quad (5)$$

potom pro 100 částí dostaneme

$$L_{e,100} = 0,505Fu \quad (6)$$

a pro 1000 částí

$$L_{e,1000} = 0,5005Fu. \quad (7)$$

V případě  $n = \infty$  bude

$$L_e = \frac{1}{2} Fu. \quad (8)$$

V předchozí úvaze jsme vyjadřovali velikost aktuálně působící síly v závislosti na posunu, tj. síla záležela na fázi posunu.

$$F = ku, \quad (9)$$

kde  $k$  je tuhost pružiny vyjádřená jednotkou [N/m]. Komplikovaný předchozí výpočet můžeme potom nahradit integrálem

$$L_e = \int_0^u F u du. \quad (10)$$

Provedme nahrazení síly  $F$  pomocí vztahu (9) a dostaneme

$$L_e = \int_0^u kudu = \frac{1}{2} k [u^2]_0^u = \frac{1}{2} ku^2 \quad (11)$$

Vyjádríme-li ze vztahu (9) posun a dosadíme do (11), dostaneme rovnici (8).

Učiňme nyní obrácenou úvahu a pokusme se vyjádřit práci, která se musí vykonat při zatěžovacím procesu při posunu závaží na snižující se plošinu. Při posunu prvního závaží vykonáme nulovou práci, protože jsme celou tíhu závaží přisoudili pružině

$$L_{e,1}^* = u_1 \cdot 0 = \frac{1}{4} u \cdot 0 = 0. \quad (12)$$

Ve druhém kroku je třeba posunout druhé závaží o  $u_2$ .

$$L_{e,2}^* = L_{e,1}^* + \frac{1}{4} u \frac{1}{4} F = \frac{1}{16} uF. \quad (13)$$

Třetí závaží posunujeme o  $0,5u$  a práci vyjádříme

$$L_{e,3}^* = L_{e,2}^* + \frac{2}{4}u \frac{1}{4}F = \frac{3}{16}uF . \quad (14)$$

Celková komplementární práce bude

$$L_{e,4}^* = L_{e,3}^* + \frac{3}{4}u \frac{1}{4}F = \frac{6}{16}uF \quad (15)$$

Celková práce, vyjádřená jako součet přetvárné a komplementární přetvárné práce, bude

$$L_{e,tot} = L_e + L_e^* = \frac{10}{16}Fu + \frac{6}{16}uF = Fu , \quad (16)$$

což je celková mechanická práce síly.

Pro  $n$  stejných částí můžeme psát

$$L_e^* = \sum_{i=0}^{n-1} uF = \frac{n \cdot 0 + n-1}{n^2} uF = \frac{n^2 - n}{2n^2} uF , \quad (17)$$

Pro  $n = 100$  dostaneme

$$L_{e,100}^* = 0,495uF \quad (18)$$

a pro  $n = 1000$

$$L_{e,1000}^* = 0,4995uF . \quad (19)$$

Pro  $n = \infty$

$$L_{e,\infty}^* = 0,5uF = L_{e,\infty} . \quad (20)$$

Doplňkovou přetvárnou práce vnějších sil můžeme napsat integrálně

$$L_e^* = \int_0^F u F dF . \quad (21)$$

Zde je vyjádřen posun jako funkce aktuálně působící síly, čímž se doplňková práce liší od přetvárné práce. Dosadíme-li za posun ze vzorce (9), dostaneme

$$L_e^* = \int_0^F \frac{F}{k} dF = \frac{1}{2k} [F^2]_0^F = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k} . \quad (22)$$

Po zpětném dosazení z fyzikální podmínky (9) dostaneme vztah totožný s (8).

Středoevropské centrum pro vytváření a realizaci inovovaných  
technicko-ekonomických studijních programů

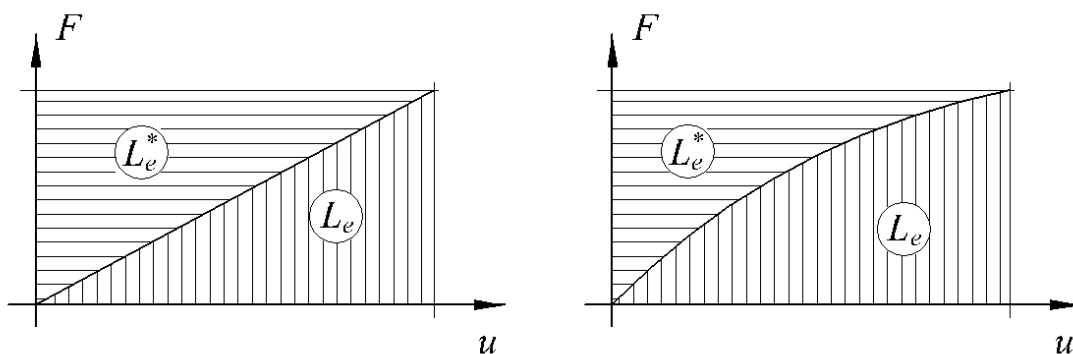
Registrační číslo CZ.1.07/2.2.00/28.0301

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Pro lineárně pružný materiál platí rovnost

$$L_e = L_e^* . \quad (23)$$

Pro nelineární chování materiálů tato rovnost zachována není, jak plyne z obrázku (\*). Přetvárná a komplementární práce sil mají též charakter ploch, vyšrafovaných na stejném obrázku.



Obrázek 2: Přetvárná práce vnějších sil pro lineárně pružný a nepružný materiál

### **PŘÍKLAD 1:**

Vypočtěte deformační práci vnějších sil u ocelového táhla průměru 10 mm, délky 4 m, jehož konec se vlivem působící síly posune o 8 mm.

### **ŘEŠENÍ:**

Průřezová plocha:

$$A = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \frac{0,01^2}{4} = 7,854 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

Normálová tuhost:

$$EA = 210 \cdot 10^9 \cdot 7,854 \cdot 10^{-5} = 16,4934 \cdot 10^6 \text{ N}$$

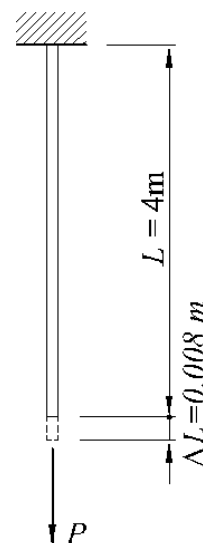
Geometrická podmínka:

$$\varepsilon_n = u' = \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{poměrné délkové přetvoření osy prutu})$$

Fyzikální podmínka:

$$N = EA\varepsilon_n = EA \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{normálová síla})$$

Konečná působící síla:



Obrázek 3: Tažený prut

$$P = 16,4934 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,008}{4} = 32986,8 \text{ N}$$

Deformační práce vnějších sil:

$$L_e = \frac{1}{2} P \Delta l \cdot \Delta l = \frac{1}{2} EA \frac{\Delta l^2}{l}$$

$$L_e = \frac{1}{2} P \Delta l \Delta l = \frac{1}{2} 32986,8 \cdot 0,008 = 131,9472 \text{ J}$$

Komplementární (doplňková) práce vnějších sil:

$$L_e^* = \frac{1}{2} \Delta l F F$$

Posun  $\Delta l$  vyjádříme z fyzikální podmínky:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

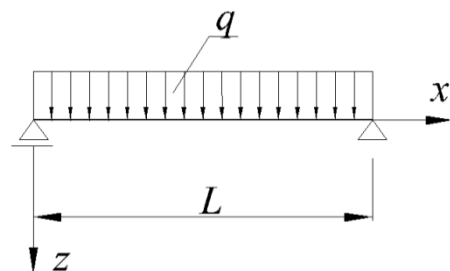
$$L_e^* = \frac{1}{2} \Delta l F F = \frac{1}{2} \frac{P^2 l}{EA}$$

Vzhledem k lineárnímu chování materiálu vyjde doplňková přetvárná práce  $L_e^*$  stejná jako přetvárná práce  $L_e$ .

### **PŘÍKLAD 2:**

Vypočítejte deformační práci vnějších sil na nosníku zatíženém spojitým rovnoměrným zatížením.

Rozpětí:	$l = 6 \text{ m}$
Modul pružnosti:	$E = 210 \text{ GPa}$
Moment setrvačnosti:	$I = 21,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$
Intenzita zatížení:	$q = 15 \text{ kN/m}$



Obrázek 4: Prostý nosník

### **ŘEŠENÍ:**

Vyjádříme komplementární přetvárnou práci, která je pro případ pružného materiálu stejná jako přetvárná práce. Komplementární přetvárná práce vnějších sil se vyjádří jako polovina integrálu diferenciálních sil násobených příslušným posunem. Posun vyjádříme jako funkci zatížení.

$$dL_e^* = \frac{1}{2} dFw q, \quad (24)$$



$$dF = q dx, \quad (25)$$

$$dL_e^* = \frac{1}{2} w q dx, \quad (26)$$

$$L_e^* = \frac{1}{2} \int_0^l w q dx. \quad (27)$$

Křivka průhybu se odvodí pomocí metod stavební mechaniky (není součástí tohoto textu):

$$w = \frac{q}{24EI} x^3 - 2lx^2 + x^3. \quad (28)$$

Po dosazení do (27) dostaneme

$$L_e^* = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{q^2}{24EI} x^3 - 2lx^2 + x^3 dx. \quad (29)$$

Výsledkem je

$$L_e^* = \frac{1}{240} \frac{q^5 l^5}{EI}. \quad (30)$$

Po dosazení zadaných hodnot dostaneme

$$L_e^* = L_e = 1622,13 J.$$

### Lagrangeova věta:

Pro přetvárnou práci vnějších sil platí

$$dL_e = F u du.$$

Jednoduše vyjádříme

$$F u = \frac{dL_e}{du}. \quad (31)$$

Pro více posunů analogicky platí

$$F_i u = \frac{\partial L_e}{\partial u_i}. \quad (32)$$

Slovně vyjádřeno:

**Vnější síla působící na pružnou konstrukci se rovná parciální derivaci přetvárné práce podle posunu působitě této síly ve směru této síly.**

**Catiglianova věta:**

Pro komplementární přetvárnou práci vnějších sil platí

$$dL_e^* = u F du$$

Vyjádríme

$$u F = \frac{dL_e^*}{dF}. \quad (33)$$

Pro více sil vyjádríme

$$u_i = \frac{\partial L_e^*}{\partial F_i}$$

Slovně vyjádřeno:

**Posun v místě a směru síly působící na pružnou konstrukci se rovná parciální derivaci komplementární přetvárné práce podle příslušné síly.**

**PŘÍKLAD 3:**

Vyděte z příkladu 1 a pomocí Lagrangeovy věty určete z rovnice přetvárné práce vnějších sil působící sílu.

**ŘEŠENÍ:**

$$L_e = \frac{1}{2} P \Delta l \quad \Delta l = \frac{1}{2} EA \frac{\Delta l^2}{l},$$

$$F u = \frac{dL_e}{d\Delta l} = EA \frac{\Delta l}{l} = P.$$

**PŘÍKLAD 4:**

Pomocí Castiglianovy věty určete z příkladu 1 posun.

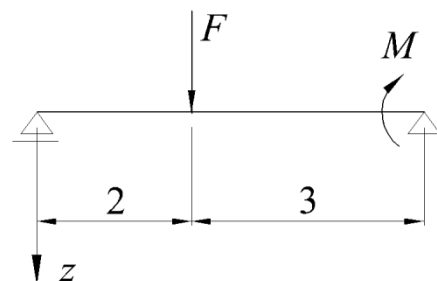
**ŘEŠENÍ:**

$$u = \Delta l = \frac{dL_e^*}{dP} = \frac{PL}{EA}.$$

**PŘÍKLAD 5:**

Pro prostý nosník podle obrázku 5

- a) vyjádřete deformační práci vnějších sil a uplatněte Lagrangeovu větu a vypočtěte sílu  $F$  a moment  $M$ ,



Obrázek 5: Příklad 5, zadání

- b) vyjádřete komplementární deformační práci vnějších sil a uplatněte Castigianovu větu a vypočtete průhyb  $w$  a pootočení  $\varphi$ .

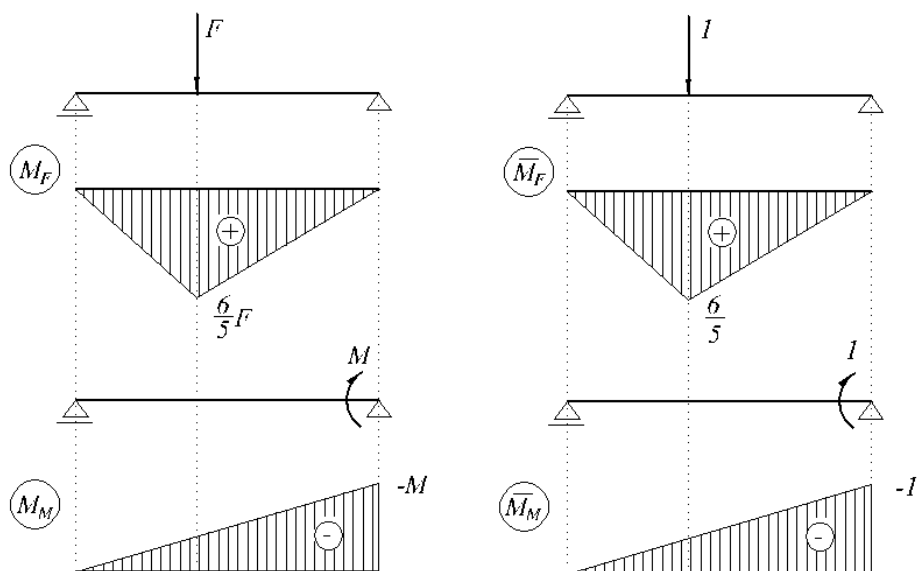
### ŘEŠENÍ:

Metodou jednotkových sil vyjádříme posun v místě síly  $F$  a pootočení v místě momentu  $M$ . Pro jednoduchost zanedbejme vliv posouvajících sil. Stačí tedy určit ohybové momenty od jednotlivých zatížení skutečných i jednotkových.

Vyjádříme průhyb pod silou  $F$ , který se skládá z vlivu působící síly a momentu v pravé podpoře. Pro vyčíslení integrálů využijeme tabulky.

$$w_F = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} F \frac{6}{5} + \frac{1}{3} \left( -\frac{2}{5} M \right) \frac{6}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{5} \left[ 2 \cdot \left( -\frac{2}{5} M \right) + -M \right] \cdot 3 \right\},$$

$$w_F = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{12}{5} F - \frac{35}{25} M \right\}.$$



Obrázek 6: Zatížení a průběhy ohybových momentů

Obdobně vyjádříme pootočení v pravé podpoře

$$\varphi_M = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} F \cdot \left( -\frac{2}{5} \right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{5} F \left[ 2 \left( -\frac{2}{5} \right) + 1 \right] \cdot 3 + \frac{1}{3} -M \cdot -1 \cdot 5 \right\}$$

$$\varphi_M = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} F \left( -\frac{2}{5} \right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{5} F \left[ 2 \left( -\frac{2}{5} \right) + -1 \right] \cdot 3 + \frac{1}{3} -M \cdot -1 \cdot 5 \right\}$$

$$\varphi_M = \left\{ -\frac{35}{25}F + \frac{5}{3}M \right\}$$

Pro vyjádření přetvárné práce vnějších sil je nutné vyjádřit zatěžující sílu a moment jako funkci posunu  $w_F$  a pootočení  $\varphi_M$ . Je třeba řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 12 & -35 \\ 5 & 25 \\ -35 & 5 \\ 25 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_F \\ \varphi_M \end{Bmatrix}.$$

Řešení soustavy a vyjádření síly  $F$  a momentu  $M$  jako funkce posunu a pootočení

$$F = EI \cdot 0,817w_F + 0,68628\varphi_M,$$

$$M = EI \cdot 0,62828w_F + 1,17647\varphi_M.$$

### Deformační práce vnějších sil

$$L_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 F_i \cdot u_i = \frac{1}{2} F \cdot w_F + \varphi_M \cdot M,$$

$$L_e = \frac{1}{2} (0,817w_F + 0,68628\varphi_M) w_F + 0,68628w_F + 1,17647\varphi_M \cdot \varphi_M,$$

$$L_e = 0,4085w_F^2 + 0,68628w_F\varphi_M + 0,588235\varphi_M^2.$$

### Lagrangeova věta:

#### Síla $F$ :

$$F = \frac{\partial L_e}{\partial w_F} = 0,817w_F + 0,68628\varphi_M.$$

#### Moment $M$ :

$$M = \frac{\partial L_e}{\partial \varphi_M} = 0,68628w_F + 1,17647\varphi_M.$$

### Komplementární práce vnějších sil:

$$L_e^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 u_i \cdot F_i = \frac{1}{2} w_F \cdot F + \varphi_M \cdot M,$$

$$L_e^* = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{EI} \left( \frac{12}{5}F - \frac{35}{25}M \right) F + \frac{1}{EI} \left( -\frac{35}{25}F + \frac{5}{3}M \right) M \right\},$$

$$L_e^* = \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{12}{5} F^2 - 2 \frac{35}{25} F \cdot M + \frac{5}{3} M^2 \right\}.$$

**Castiglianova věta:**

**Posun  $w_F$**

$$w_F = \frac{\partial L_e^*}{\partial F} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{12}{5} F - \frac{35}{25} M \right\}.$$

**Pootočení  $\varphi_M$**

$$\varphi_M = \frac{\partial L_e^*}{\partial M} = \frac{1}{EI} \left\{ -\frac{35}{25} F + \frac{5}{3} M \right\}.$$

**Poznámka:**

Pro aplikaci Lagrangeovy věty je nutné vyjádřit síly a momenty jako funkce posunů a pootočení. Podobně pro aplikaci Castiglianovy věty je nutné vyjádřit posuny a pootočení jako funkce sil a momentů.

## 2.2. Deformační (přetvárná) práce napětí

Mějme infinitezimální element tělesa podle obrázku 7. Pro zjednodušení předpokládejme, že element je zatížen pouze normálovým napětím  $\sigma_x$ .

Jak bylo odvozeno, přetvárná práce se v případě pružného materiálu vypočte jako polovina součinu konečné působící síly a posunu. V případě vnitřních sil je přetvárná práce záporná, neboť reprezentuje práci, která je v tělese „uskládněna“. Diferenciální část práce bude

$$dL_i = -\frac{1}{2} dN_x \cdot \Delta_x, \quad (34)$$

kde sílu  $dN_x$  vyjádříme jako součin napětí a diferenciální plochy

$$dN_x = \sigma_x dy \cdot dz. \quad (35)$$

Změnu délky elementu vyjádříme z Hookeova zákona jako

$$\Delta_x = \varepsilon_x dx. \quad (36)$$

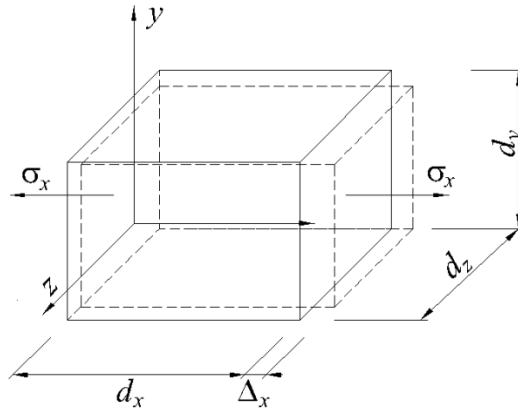
Dosazením do vzorce pro práci vnitřních sil dostaneme

$$dL_i = -\frac{1}{2} \sigma_x dy \cdot dz \cdot \varepsilon_x dx, \quad (37)$$

což se dá vyjádřit jako

$$dL_i = -\frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dV, \quad (38)$$

kde  $dV$  je diferenciální objem.



Obrázek 7: Deformační práce napětí

Celkovou práci vyjádříme jako integrál přes objem

$$L_i = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV. \quad (39)$$

Pro ostatní napětí bychom dostali podobné vztahy. Seřadíme-li příslušná napětí do vektorů, dostaneme obecný vztah pro přetvárnou práci napětí

$$L_i = -\frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (40)$$

Kde

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}^T \quad (41)$$

Je vektor poměrných přetvoření a

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}^T \quad (42)$$

je vektor napětí.

### Deformační práce vnitřních sil přímého rovinného prutu

Deformační práci můžeme pro případy prutů, stěn, desek a deskostěn vyjádřit i pomocí vnitřních sil. Pro rovinný prut bude platit

$$L_i = -\frac{1}{2} \left\{ \int_L N \varepsilon_n dx + \int_L V \varepsilon_v dx + \int_L M \varepsilon_m dx \right\}. \quad (43)$$

Podrobné odvození je uvedeno v příloze.

Do této rovnice je možno dosadit z fyzikálních podmínek

$$N = EA \varepsilon_n, \quad (44)$$

$$V = GA_K \varepsilon_v, \quad (45)$$

$$M = EI \varepsilon_m. \quad (46)$$

Potom dostaneme alternativní zápisy

$$L_i = -\frac{1}{2} \left\{ \int_L \frac{N^2}{EA} dx + \int_L \frac{V^2}{GA_K} dx + \int_L \frac{M^2}{EI} dx \right\} \text{ nebo} \quad (47)$$

$$L_i = -\frac{1}{2} \left\{ \int_L EA \varepsilon_n^2 dx + \int_L GA_K \varepsilon_v^2 dx + \int_L EI \varepsilon_m^2 dx \right\}. \quad (48)$$

### 2.3. Deformační práce soustavy

Soustava se skládá z tělesa a jeho vnějších sil. Obě tyto části tvoří konzervativní systém, pro který platí zákon o zachování mechanické energie, který je aplikací obecného zákona zachování energie. Zákon zachování mechanické energie říká, že celková energie v izolovaném mechanickém systému při mechanickém ději, zůstává konstantní. Soustavu těleso plus zatížení můžeme považovat za izolovaný mechanický systém. V dalších úvahách však nebudeme předpokládat dynamické chování soustavy a rovněž nebudeme předpokládat přeměnu mechanické energie na plastické tváření materiálu. Zůstaneme u ideálního lineárně pružného chování.

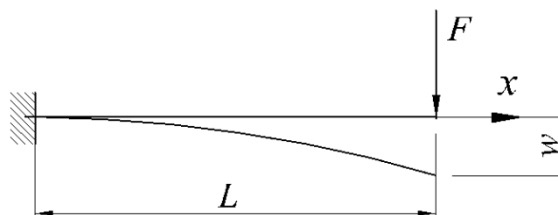
Na základě předchozích úvah můžeme prohlásit, že součet práce vnějších a práce vnitřních sil musí být nulový.

$$L_i + L_e = 0 \quad (49)$$

Využití pro řešení reálné konstrukce ukazuje následující příklad.

**PŘÍKLAD 6**

Pomocí principu nulové přetvárné práce vypočtete průhyb volného konce konzoly podle obrázku. Zanedbejte práci posouvajících sil. Předpokládejte, že ohybová tuhost  $EI$  je konstantní po celé délce konzoly.



Obrázek 8: Konzola, zatížení, průhyb

**ŘEŠENÍ:**

Přetvárná práce vnějších sil je

$$L_e = \frac{1}{2} Fw.$$

Přetvárná práce vnitřních sil je

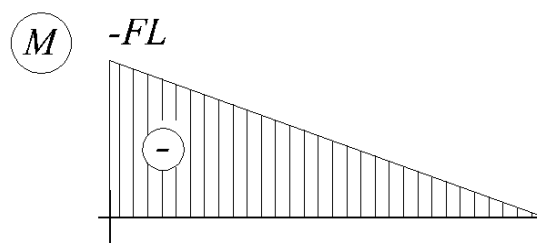
$$-L_i = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^L N \varepsilon_n dx + \int_0^L V \varepsilon_v dx + \int_0^L M \varepsilon_m dx \right\},$$

kde první a druhý integrál bude nulový a zůstane pouze poslední, vyjadřující přetvárnou práci ohybových momentů. Za  $\varepsilon_m$  dosadíme z geometrické podmínky a dostaneme

$$-L_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2 dx.$$

Na Obrázek 9 je graf ohybových momentů. Pro dosažení do rovnice pro práci vnitřních sil potřebujeme rovnici ohybových momentů, kterou snadno odvodíme

$$M = F(x - L).$$



Obrázek 9: Konzola, průběh ohybových momentů

Dosaďme do rovnice pro deformační práci vnitřních sil a dostaneme

$$-L_i = \frac{1}{2EI} \int_0^L F^2 (x - L)^2 dx = \frac{1}{2EI} \frac{F^2}{2EI} \left( \frac{L^3}{3} - L^3 + L^3 \right) = \frac{F^2 L^3}{6EI}.$$

Dosaďme-li do rovnice pro celkovou přetvárnou práci, dostaneme

$$L_e + L_i = \frac{1}{2} Fw - \frac{F^2 L^3}{6EI} = 0.$$

Z předchozí rovnice snadno vypočteme průhyb



$$w = \frac{FL^3}{3EI},$$

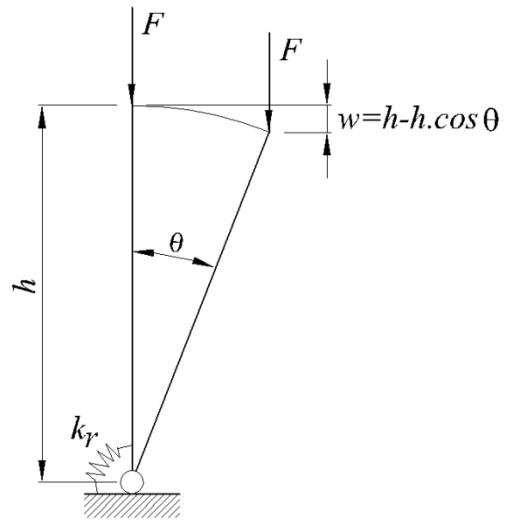
který se shoduje s přesným řešením.

### PŘÍKLAD 7

Tuhý prut je uložen podle obrázku. Kloub klade proti pootočení odpor podle rovnice

$$M_r = k_r \theta_r \quad (50)$$

Najděte velikost kritické síly  $F_{cr}$  při které dochází ke ztrátě stability.



Obrázek 10: Stabilita tuhého prutu

### ŘEŠENÍ

Práce vnější síly bude

$$L_e = Fw.$$

Násobitel  $1/2$  chybí, protože po dosažení kritického stavu se zvětšuje posun za konstantního zatížení.

Předchozí vztah dosazením za posun  $w$  upravme

$$L_e = Fh(1 - \cos \theta).$$

Pomocí Taylorova polynomu můžeme vyjádřit  $\cos \theta$  jako

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{24} \theta^4 - \dots \quad (51)$$

Po vyjádření funkcí sinus a cosinus a zanedbání třetích a vyšších mocnin úhlu  $\theta$  dostaneme

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \theta^2. \quad (52)$$

Potom práce vnějších sil je přibližně

$$L_e \doteq Fh \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) \right] = \frac{1}{2} Fh \theta^2. \quad (53)$$

Přetvárná práce vnitřních sil je

$$-L_i = \frac{1}{2} M_r \theta = \frac{1}{2} k_r \theta^2. \quad (54)$$

Dosadíme-li do podmínky nulové přetvárné práce, dostaneme

$$L_e + L_i = \frac{1}{2} F h \theta^2 - \frac{1}{2} k_r \theta^2 = 0. \quad (55)$$

V této rovnici je pouze jedna neznámá, síla  $F$ . Snadno ji vyjádříme

$$F = \frac{k_r}{h}. \quad (56)$$

Uvedený vzorec představuje kritickou sílu a shoduje se s přesným řešením.

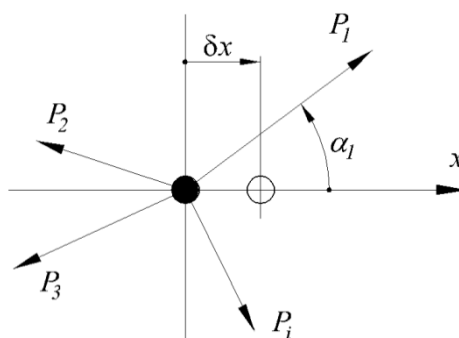
### 3. Virtuální práce

V předchozích částech byla vysvětlena přetvárná práce vnějších a vnitřních sil. Další skupinou je virtuálně práce. Myšlenkový postup pro její odvození ilustruje následující úvaha.

Mějme částici, na kterou působí soustava rovnovážných sil  $P_i$ , jejichž úhlová odchylka od osy  $x$  je  $\theta$ . Částice se posune ve směru osy  $x$  o  $\delta u$ . Potom práce vykonaná soustavou sil bude

$$\delta L_e = P_1 \cos \theta_1 \cdot \delta u + P_2 \cos \theta_2 \cdot \delta u + \dots + P_n \cos \theta_n \cdot \delta u = \sum P_{ix} \delta u = \delta u \sum P_{ix}, \quad (57)$$

což je silová podmínka rovnováhy vynásobená posunem  $\delta u$ . Takové vyjádření podmínky rovnováhy má některé výhody – například reakce v pevných podporách konají nulovou práci. Rovnice (57) představuje virtuální práci, kde síly jsou skutečné a posun  $\delta u$  je virtuální. Slovo virtuální se obvykle vysvětluje jako myšlený avšak možný. Skutečný význam však je spíše „ne v příčinné souvislosti“, jak je vidět v předchozím příkladu. **Virtuální posun** je tedy **infinitesimální** (velmi malý) posun, který **není v rozporu** s vazbami soustavy a nezávisí na silách soustavy. V předchozí ilustraci této definici odpovídá posun  $\delta u$ , který nebyl vyvolán rovnovážnou soustavou sil  $P_i$ . Z tohoto důvodu se také neuplatní násobitel  $1/2$  jako v předchozích případech, protože síla působí od počátku plnou hodnotou.



Obrázek 11: Virtuální posun částice

Obecně, pro případ tělesa, virtuálním přemístěním tělesa  $\delta \mathbf{u}$  rozumíme libovolný infinitesimální deformační stav, který plní podmínky spojitosti uvnitř tělesa a deformační (kinematické) okrajové podmínky na jeho hranici  $S_p$ . Proměnná  $\delta \mathbf{u}$  je v obecném případě vektor funkcí.

Virtuální práce vnějších sil tělesa bude

$$\delta L_e = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{X} dV + \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dS, \quad (58)$$

kde vektor  $\mathbf{X}$  reprezentuje objemové síly (vznikající například změnou teploty, reologií, vlastní tíhou) a vektor  $\bar{\mathbf{p}}$  je vektor zatížení na hranici tělesa  $S_p$ .

Podobně jako virtuální práce vnějších sil  $\delta L_e$  existuje virtuální práce vnitřních sil

$$\delta L_i = - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (59)$$

kde vektor  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  představuje pole poměrných přetvoření v tělese a vektor  $\boldsymbol{\sigma}$  reprezentuje pole napětí. Všechny vektory v rovnici (59) obsahují, v obecném případě, funkce proměnných  $x, y, z$ .

Pro rovinný prut bude platit (viz příloha A)

$$\delta L_i = - \left\{ \int_L N \delta \varepsilon_n dx + \int_L V \delta \varepsilon_v dx + \int_L M \delta \varepsilon_m dx \right\}. \quad (60)$$

Podobně jako v případě přetvárné práce platí, že součet virtuálních prací vnějších a vnitřních sil musí být nulový. Pro obecnou úlohu tedy platí:

$$\delta L_e + \delta L_i = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{X} dV + \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dS - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = 0, \quad (61)$$

což je zápis **Lagrangeova principu virtuálních přemístění** (též nazývaný obecný princip rovnováhy):

**Při libovolném, virtuálním přetvoření pružného tělesa nacházejícího se v rovnovážném stavu (jako celek i každá jeho část), je součet virtuálních prací všech vnějších a vnitřních sil (skutečných) na virtuálních posunech a deformacích roven nule.**

Prakticky vede tento princip na deformační varianty výpočetních metod.

V přechodím příkladě byla virtuální práce definována jako součin skutečné síly a virtuálního posunu. Virtuální práci ale můžeme definovat i jako součin virtuální síly a skutečného posunu. Příslušnou práci vnějších sil potom nazveme komplementární a označíme  $\delta L_e^*$  a  $\delta L_i^*$  pro práci vnitřních sil.

Virtuální síly představují možný – myslitelný silový stav tělesa definovaný vnějšími virtuálními silami  $\delta \mathbf{p}$  přiloženými na povrchu tělesa, tj. na hranici  $S_p$ , nebo objemovými  $\delta \mathbf{X}$  uvnitř tělesa (například zatížení změnou teploty, vlastní tíhou či objemovými změnami betonu) a vnitřními silami danými polem napětí  $\delta \boldsymbol{\sigma}$ . Tyto myšlené síly nemusí odpovídat žádnému reálnému stavu tělesa, musí však splňovat podmínky rovnováhy v každém bodě tělesa a teda i tělesa jako celku.

Doplňková (komplementární) práce vnějších sil potom bude

$$\delta L_e^* = \int_V \mathbf{u}^T \delta \mathbf{X} dV + \int_{S_p} \mathbf{u}^T \delta \bar{\mathbf{p}} dS \quad (62)$$

a komplementární virtuální práce vnitřních sil je

$$\delta L_i^* = - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (63)$$

Součet virtuálních prací musí být opět nulový.

$$\delta L_e^* + \delta L_i^* = \int_V \mathbf{u}^T \delta \mathbf{X} dV + \int_{S_p} \mathbf{u}^T \delta \bar{\mathbf{p}} dS - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV = 0. \quad (64)$$

Toto je matematický zápis Castiglianova principu virtuálních sil:

**Ze všech myslitelných, staticky přípustných stavů napjatosti tělesa nastane právě ten, při němž je komplementární energie systému minimální.**

Prakticky vede tento princip na silové varianty výpočetních metod.

Princip virtuálních přemístění předpokládá splnění podmínek kompatibility a vede na podmínky rovnováhy, kdežto princip doplňkové virtuální práce (virtuálních sil) předpokládá platnost podmínek rovnováhy a vede na podmínky kompatibility. Castiglianův princip se též nazývá obecným principem spojitosti tělesa.

Tyto skutečnosti budou ilustrovány na následujících příkladech

### **PŘÍKLAD 8:**

Vyjádřete virtuální práci konzoly podle obrázku. Dosadte do Lagrangeova principu virtuálních přemístění.

### **ŘEŠENÍ:**

Virtuální práci je třeba vyjádřit v závislosti na virtuálním posunu  $\delta\Delta$ . Virtuální práce vnitřních sil je

$$-\delta L_i = M \delta\theta = M \frac{\delta\Delta}{h} \quad (65)$$

a virtuální práce vnějších sil

$$\delta L_e = P \delta\Delta . \quad (66)$$

Součet virtuálních prací musí být nulový

$$\delta L_e + \delta L_i = P \delta\Delta - M \frac{\delta\Delta}{h} = 0 . \quad (67)$$

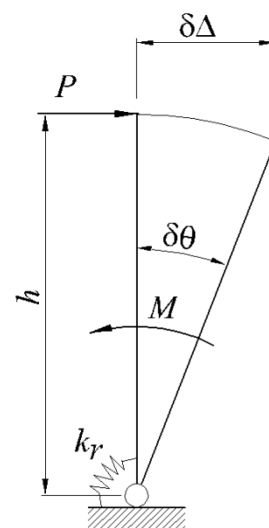
Rovnici můžeme vydělit  $\delta\Delta$  a dostaneme

$$P = \frac{M}{h} \Rightarrow M = Ph , \quad (68)$$

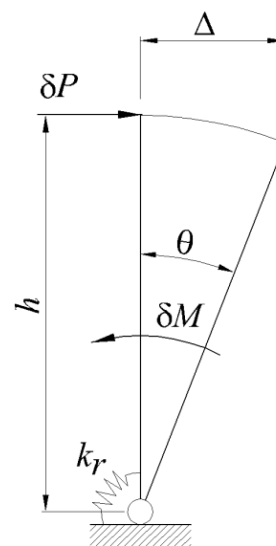
což je podmínka rovnováhy. Poznamenejme, že na začátku příkladu jsme předpokládali podmínku kompatibility

$$\delta\theta = \frac{\delta\Delta}{h} . \quad (69)$$

Výsledkem je podmínka rovnováhy.



Obrázek 12: Složky přemístění tuhé konzoly pro Lagrangeův princip



Obrázek 13: Složky přemístění tuhé konzoly pro Castiglianův princip

**PŘÍKLAD 9:**

Vyjádřete doplňkovou virtuální práci konzoly zatíženou virtuální silou  $\delta P$  podle obrázku 13. Dosadte do Castiglianova principu virtuálních sil.

**ŘEŠENÍ:**

Práci virtuální síly vyjádříme

$$\delta L_e^* = \delta P \Delta, \quad (70)$$

práce vnitřních sil bude

$$-\delta L_i^* = \delta M \theta = \delta P h \theta. \quad (71)$$

Dosazením do Castiglianova principu získáme

$$\delta P \Delta - \delta P h \theta = 0. \quad (72)$$

Po vynásobení rovnice výrazem  $1/\delta P$  a úpravě dostaneme

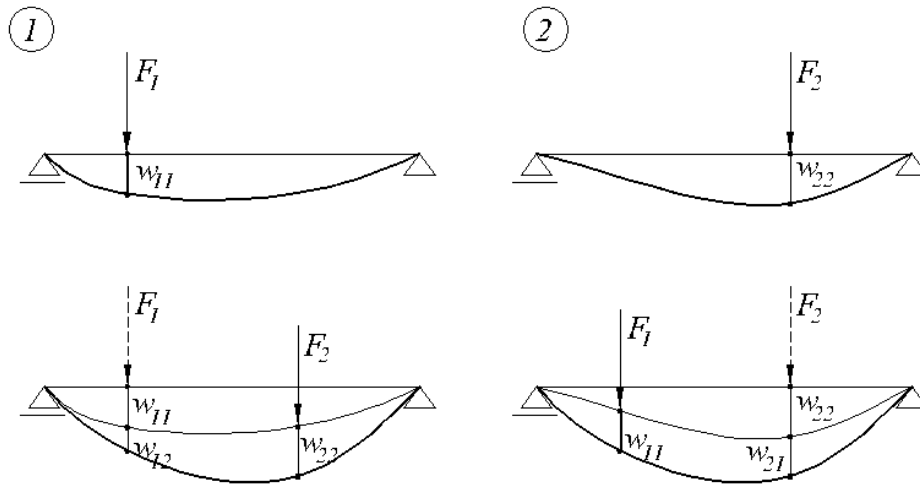
$$\theta = \frac{\Delta}{h}, \quad (73)$$

což je podmínka kompatibility. Předpokládali jsme podmínku rovnováhy

$$\delta M = \delta P h. \quad (74)$$

**3.1. Princip superpozice mechanické práce**

V lineární oblasti mechaniky platí princip superpozice (skládání) silových účinků. Podobně tedy musí platit princip superpozice mechanické práce. Podle obrázku 14 uvažujme postupné zatěžování prostého nosníku. Zatěžujeme-li prvně silou  $F_1$ , dosáhneme průhybu  $w_1$ . Po přidání síly  $F_2$  se průhyb zvětší na  $w_1 + w_2$ . Stejného výsledku dosáhneme i opačným postupem zatěžování. Existuje-li princip superpozice pro zatížení a přemístění, musí existovat superpozice i pro mechanickou práci.



Obrázek 14: Superpozice mechanické práce

Pokusme se vyjádřit mechanickou energii podle zatěžovacího postupu vlevo.

$$L_{e,1} = \frac{1}{2} F_1 w_{11} + \frac{1}{2} F_2 w_{22} + F_1 w_{12}. \quad (75)$$

U prvních dvou sčítanců jsme použili násobek  $\frac{1}{2}$  u třetího nikoliv. První dva sčítance totiž představují takzvanou vlastní práci sil (síla pracuje na průhybu, který sama vyvolala), třetí sčítanec představuje virtuální práci, neboť se jedná o práci síly na posunu, který nezpůsobila. Vyjádřeme mechanickou práci podle zatížení vpravo

$$L_{e,2} = \frac{1}{2} F_2 w_{22} + \frac{1}{2} F_1 w_{11} + F_2 w_{21}. \quad (76)$$

Je jasné, že celková práce vnějších sil podle postupu vlevo i vpravo musí být stejná

$$L_{e,1} = \frac{1}{2} F_1 w_{11} + \frac{1}{2} F_2 w_{22} + F_1 w_{12} = L_{e,2} = \frac{1}{2} F_2 w_{22} + \frac{1}{2} F_1 w_{11} + F_2 w_{21}. \quad (77)$$

Potom musí platit

$$F_1 w_{12} = F_2 w_{21}, \quad (78)$$

což je zápis Bettiho věty.

**Bettiho věta (1872)**

**Virtuální práce jedné soustavy vnějších sil na posunutích vyvolaných druhou soustavou sil je rovna virtuální práci druhé soustavy vyvolaných první soustavou sil.**

Význam indexů u posunů  $w_{ij}$ .

$i$  označuje sílu, v jejímž místě a směru měříme přemístění,

Středoevropské centrum pro vytváření a realizaci inovovaných  
technicko-ekonomických studijních programů

Registrační číslo CZ.1.07/2.2.00/28.0301

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

$j$  označuje sílu, která přemístění vyvolala.

Uvažujeme-li v rovnici (1.62) rovnost sil  $F_1 = F_2$ . Potom bude platit

$$w_{12} = w_{21}, \quad (79)$$

což je matematické vyjádření **Maxwellovy věty** (1864), která se slovně vyjádří například takto:

**Přemístění vyvolané jednou silou v místě a směru síly druhé, je za předpokladu stejně velkých sil stejné jako přemístění vyvolané druhou silou v místě první.**

Poznamenejme, že obě věty jsou platné i pro momentová zatížení (přemístěním jsou rotace) a dokonce i pro kombinaci momentů a sil.



## 4. Potenciální energie

Energie je veličina měřitelná pouze množstvím dodané práce na změnu energetického stavu tělesa. Potenciální energií pak rozumíme rozdíl mezi potenciální energií na konci zatěžovacího a deformačního procesu a toutéž energií na jeho počátku. Za nulový stav se pokládá taková konfigurace konstrukce, kdy zatížení je již v kontaktu s konstrukcí, ale ještě nevyvolalo žádné deformace.

Celková hodnota potenciální energie je dána součtem potenciální energie vnějších sil (zatížení)  $\Pi_e$  a potenciální energie vnitřních sil  $\Pi_i$ .

### 4.1. Potenciální energie vnějších sil

odpovídá úbytku polohové potenciální energie zatížení vyvolaného posunem působišť zatěžovacích sil (nebo rotací v případě působení zatěžujícího momentu). Potenciální energie vnějších sil je tedy záporná. Na rozdíl od přetvárné práce se uplatní součiny sil a jejich působišť plnou hodnotou (nenásobí se  $\frac{1}{2}$ ). V obrázku 3 je potenciální energie vnějších rovna obsahu celého obdélníka. Matematicky vyjádřeno

$$\Pi_e = -L_e + L_e^* , \quad (80)$$

### 4.2. Potenciální energie vnitřních sil (deformační energie)

je energie akumulovaná v systému během zatěžování.

$$\Pi_i = -L_i = L_e . \quad (81)$$

### 4.3. Potenciální energie systému

Systémem je zde míněn mechanický systém, kterým je dvojice konstrukce a zatížení. Potenciální energie tohoto systému je potom součtem potenciální energie vnějších a vnitřních sil. Dosadíme-li za energie práce vnějších a vnitřních sil podle předchozích úvah, dostaneme vztah

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = -L_e + L_e^* + L_e = -L_e^* , \quad (82)$$

Ze kterého plyne, že celková potenciální energie mechanického systému je rovná záporně vzaté komplementární přetvárné práci vnějších sil. Pro těleso v rovnováze je vždy záporná nebo rovná nule (pro nezatížené těleso), to znamená, že úbytek polohové energie je vždy větší než energie akumulovaná v konstrukci. Komplementární práci si můžeme představit jako práci spotřebovanou na zpomalení procesu zatěžování tak, aby bylo dosaženo statického zatěžování. Tato část energie se v tělese

neakumuluje a uniká mimo systém, přemění se na jiný druh energie, například na tepelnou při brzdění.

Zajímavá je úvaha o odtížení. V pružné konstrukci je energie akumulovaná na návrat do původního, nezátíženého stavu. Aby však tohoto stavu bylo dosaženo, musí být dodána energie o velikosti komplementární práce vnějších sil. Podíváme-li se znovu na obrázek 1, musíme dodat práci, kterou budeme jednotlivá závaží zvedat zpět na plošinu, přičemž každé další závaží budeme zvedat do menší výšky tak, jak se bude plošina vracet do původního stavu.

Potenciální energie konstrukce, která je v rovnovážném stavu, má významnou vlastnost extrému, kterou lze velmi efektivně uplatnit pro řešení konstrukcí.

### **Věta o minimu potenciální energie:**

Ze všech **možných deformačních stavů** pružného tělesa, které neporušují jeho spojitost a respektují veškeré kinematické (deformační) okrajové podmínky nastane právě ten, při němž je **potenciální energie** systému **minimální**.

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = \min. \quad (83)$$

Odůvodnění provedme pomocí následující úvahy. Konstrukci, která je v rovnováze udělíme nekonečně malou, avšak nenulovou změnu - variaci. Mějme na mysli, že se nejedná o změnu například maximálního průhybu, ale o změnu celé deformační křivky  $\delta \mathbf{u}$  (v případě prutů) a funkcí poměrných přetvoření  $\delta \varepsilon$ . Tyto změny jsou vlastně virtuální posuny nebo přetvoření. Je-li konstrukce v rovnováze a tedy potenciální energie dosahuje extrémní hodnoty, nedojde při „dostatečně malé“ variaci ke změně potenciální energie systému. Je to velmi podobná úvaha jako v případě extrému funkce – viz příloha B. Uplatníme-li Lagrangeův princip virtuálních posunů, tak zároveň musí platit, že práce vnějších a vnitřních sil skutečných na udělených virtuálních posunech a deformacích je rovna nule pro případ konstrukce nacházející se v rovnováze. Z předchozí úvahy plyne, že oba principy – princip minima potenciální energie a Lagrangeův princip virtuálních posunů jsou rovnocenné. Pro potenciální energii můžeme psát

$$\delta_u \Pi = 0. \quad (84)$$

Index  $u$  u znaku variace znamená, že virtuální změně byly podrobeny přemístění  $\mathbf{u}$  a deformace  $\varepsilon$  a nikoliv silové veličiny. Rovnice (84) je podmínkou pro extrém potenciální energie soustavy. V případě extrému nabývá potenciální energie stacionární hodnotu (viz příloha B). Bylo dokázáno, že v případě stabilní rovnováhy se jedná o minimum – viz rovnice (83).

### **PŘÍKLAD 10:**

Pro taženou tyč podle obrázku vypočtete hodnotu potenciální energie pro různé posuny zatíženého konce v rozsahu 0 až 10 mm a vykreslete graf závislosti posunu a hodnoty potenciální energie. Vypočtete posun odpovídající minimu potenciální energie a spočtete potenciální energii odpovídající tomuto minimu. Dosad'te:

$$E = 210 \text{ GPa}, \quad A = 3,14 \cdot 10^4 \text{ m}^2 \text{ (tyč průměru 20 mm)}, \quad F = 150 \text{ kN a } L = 2 \text{ m}.$$

**ŘEŠENÍ:**

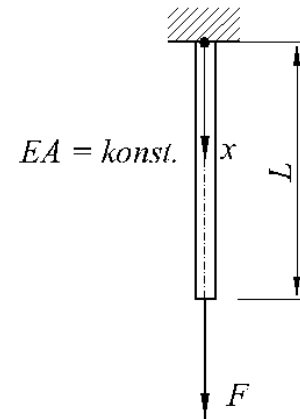
Konstrukce je staticky určitá. Normálová síla je konstantní, stejně tak je konstantní poměrná deformace  $\varepsilon_n$ , která se vypočte

$$\varepsilon_n = \frac{u}{L},$$

kde  $u$  je posun volného konce a  $L$  je délka prutu.

Potenciální energie vnitřních sil (pouze pro tahová či tlaková namáhání)

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^L EA \varepsilon_n^2 dx \right\} = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{u}{L} \right)^2 dx. \quad (85)$$



Obrázek 15: Tažený prut

Vzhledem k tomu, že průřezové charakteristiky, délka i posun na konci jsou vzhledem k  $x$  konstantní, můžeme psát

$$\Pi_i = \frac{EA u^2 L}{2 L^2} \int_0^L dx. \quad (86)$$

Po integraci

$$\Pi_i = \frac{EA}{2L} u^2. \quad (87)$$

Potenciální energie vnějších sil se spočte jako ztráta polohové energie zatížení

$$\Pi_e = -Fu. \quad (88)$$

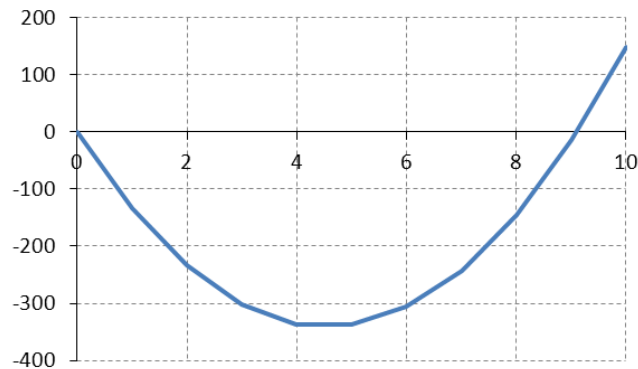
Celková potenciální energie:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e = \frac{EA}{2L} u^2 - Fu. \quad (89)$$

Vyčísleme nyní do tabulky potenciální energii pro posun  $u$  1 až 10 mm.

Posun [mm]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Pi_i$ J	16	66	148	264	412	593	808	1055	1335	1649
$\Pi_e$ J	-150	-300	-450	-600	-750	-900	-1050	-1200	-1350	-1500
$\Pi$ J	-134	-234	-302	-336	-338	-307	-242	-145	-15	149

Potenciální energie vynesena do grafu



Obrázek 16: Potenciální energie v závislosti na posunu

Podle věty o minimu potenciální energie je správný ten posun, pro nějž je potenciální energie systému minimální. To znamená, že správné řešení bude pro posun mezi třemi a pěti milimetry. Hledáme extrém funkce, který se získá první derivací podle posunu a jejím porovnáním s nulou.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = \frac{EA}{L}u - F = 0, \quad (90)$$

$$u = \frac{FL}{EA} = 4,5496 \text{ mm} . \quad (91)$$

Minimum potenciální energie bude  $-341,22 \text{ J}$  .

#### Ověření metodou jednotkových sil:

Průběh normálových sil je konstantní od skutečného i jednotkového zatížení. Potom posun volného konce se spočte

$$u = \frac{1}{EA} F \cdot 1 \cdot L = \frac{FL}{EA}, \quad (92)$$

což odpovídá rovnici (91).

## 5. Variační úlohy

V předchozím příkladu byla známa funkce protažení prutu vlivem zatížení (lineární funkce s nulovým posunem v místě uložení), hledal se pouze její parametr - posun volného konce. V obecných případech však nejsou funkce přemístění předem známy, což je jeden z charakteristických rysů variační úlohy.

1. Nehledá se určitá konkrétní hodnota (např. maximum určité funkce apod.), ale hledá se křivka, nebo funkce, která tuto křivku popisuje.
2. Hledaná křivka musí splňovat okrajové nebo počáteční podmínky.
3. Hledaná funkce musí splňovat podmínku extrému určité veličiny – takzvaného funkcionálu. V našem případě je funkcionál potenciální energie a hledáme jeho extrém – minimum.

Funkcionál je číslo, avšak závisí na celém průběhu křivky, je obvykle integrálem z nějakého operátoru nad funkcí  $y = f(x)$  a jejími derivacemi

$$F = \int_{x_0}^{x_{kon}} L(y, y', y'' \dots y^{(n)}) dx. \quad (93)$$

V našem případě je funkcionálem potenciální energie. Ta je závislá na prvních nebo druhých derivacích křivek přemístění. **Ve variační úloze se hledá křivka, která udělí funkcionálu extrém, v našem případě minimum pro potenciální energii.** Taková křivka se nazývá extrémála. Hodnota funkcionálu potenciální energie vyčíslená pro jakoukoliv jinou křivku bude větší než pro extrémála. Pro křivky velmi blízké extrémále, které se liší o infinitezimální přírůstek je hodnota funkcionálu shodná, má tedy hodnotu stacionární. Zdůvodnění tohoto faktu je možné vyvodit z podobnosti extrému funkcionálu a funkce. Je obsaženo v příloze B. Variací funkce  $y = f(x)$  se rozumí infinitezimální přírůstek nejen jedné hodnoty funkce, ale celé funkce. To znamená, že je to rozdíl dvou blízkých funkcí  $y_1(x)$  a  $y(x)$ .

$$\delta y(x) = y_1(x) - y(x). \quad (94)$$

Za funkce vzájemně blízké pokládáme takové funkce, které se málo liší nejen ve funkčních hodnotách, ale též v hodnotách svých derivací až do určitého stupně podle úlohy. V klasických variačních úlohách stavební mechaniky postačují obvykle druhé derivace (blíže viz Příloha B).

Existují dvě skupiny metod pro řešení variačních úloh. První skupinou jsou **nepřímé** metody, které variační úlohu převedou na řešení diferenciální rovnice (Eulerovy), která je k dané úloze jednoznačně přiřazena. V teorii pružnosti není tento postup účelný, protože tímto postupem obdržíme diferenciální rovnici rovnováhy (prutu, desky, tělesa). K jejichž řešení právě hledáme alternativu v podobě variačních řešení.

**Přímé** metody hledají řešení extrému funkcionálu pomocí bázových (náhradních) funkcí jejich lineárních kombinací.

## 5.1. Ritzova metoda

Hledanou funkci, která udělí funkcionálu extrém, hledáme ve formě součtu  $n$  funkcí

$$y(x) = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \dots + a_n\psi_n = \sum_{i=1}^n a_i\psi_i, \quad (95)$$

kde

$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i, \dots, \psi_n$  jsou zvolené aproximační funkce. Každá z těchto funkcí musí splňovat okrajové podmínky,

$a_1, \dots, a_i, \dots, a_n$  jsou neznámé koeficienty.

Příslušný funkcionál vyjádříme pomocí náhradní funkce  $y(x)$ . Náhradní funkce  $y(x)$  i příslušný funkcionál  $F$  teď závisí na koeficientech  $a_i$ . Hodnotu funkcionálu  $F$  teď může měnit pouze změnou koeficientů  $a_i$ . Podmínka extrému teď přechází do podmínky extrému funkce o  $n$  proměnných

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (96)$$

Tyto podmínky představují soustavu rovnic o  $n$  neznámých součinitelích  $a_i$ . Řešením soustavy rovnic dostaneme koeficienty  $a_i$  a tím je plně definována funkce  $y(x)$ .

Z předchozího výkladu je jasné, že kvalita řešení závisí jednak na „vhodnosti“ zvolených básových funkcí  $\psi_i$  a jednak na počtu členů, které vezmeme v úvahu.

### PŘÍKLAD 11:

Tažený prut zatížený rovnoměrným spojitým normálovým zatížením řešte Ritzovou metodou. Jako náhradní funkce použijte polynom prvního až třetího řádu. Počítejte obecně, řešení ověřte integrací.

Náhradní funkce:

$$\psi_1 = x,$$

$$\psi_2 = x^2,$$

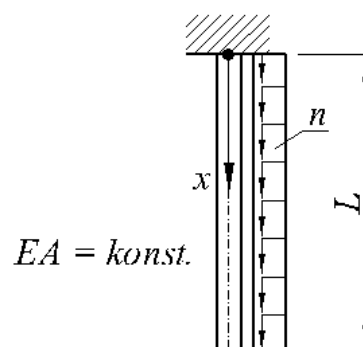
$$\psi_3 = x^3.$$

### ŘEŠENÍ:

Počátek osy  $x$  je výhodně zvolen v uložení prutu. Všechny tři

Středoevropské centrum pro vytváření a realizaci inovovaných  
technicko-ekonomických studijních programů  
Registrační číslo CZ.1.07/2.2.00/28.0301

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Obrázek 17: Ritzova metoda - tažený prut

náhradní funkce, v souladu s požadavky Ritzovy metody, vyhovují okrajové podmínce, kterou je nulový posun v uložení

$$u(x=0) = 0.$$

Z důvodu plnění okrajové podmínky nelze použít konstantní funkci.

Náhradní funkce můžeme v souladu s Ritzovou metodou psát

$$u = \sum_{i=1}^3 a_i \psi_i,$$

kde  $\psi_1$  až  $\psi_3$  jsou náhradní funkce a  $a_1$  až  $a_3$  jsou váhové koeficienty, které dostaneme jako řešení soustavy rovnic.

Pro řešení budeme potřebovat geometrickou

$$\varepsilon_n = u'$$

a fyzikální podmínku

$$N = EA\varepsilon_n.$$

Potenciální energie vnitřních sil bude

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L EA \varepsilon_n^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EA u'^2 dx. \quad (97)$$

Vzhledem ke konstantnímu průřezu lze průřezové charakteristiky vytknout před integrál

$$\Pi_i = \frac{EA}{2} \int_0^L u'^2 dx. \quad (98)$$

Pro dosažení do vztahu pro potenciální energii vnitřních sil potřebujeme znát první derivaci náhradních funkcí podle  $x$

$$u' = \frac{du}{dx} = \left( \sum_{i=1}^3 a_i \psi_i \right)' = \sum_{i=1}^3 a_i \psi_i', \quad (99)$$

$$\psi_1' = 1, \quad \psi_2' = 2x, \quad \psi_3' = 3x^2.$$

Po dosažení do rovnice pro potenciální energii vnitřních sil dostaneme

$$\begin{aligned}\Pi_i &= \frac{EA}{2} \int_0^L (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2)^2 dx = \\ &= EA \left( \frac{1}{2} a_1^2 L + a_1 a_2 L^2 + a_1 a_3 L^3 + \frac{2}{3} a_2^2 L^3 + \frac{3}{2} a_2 a_3 L^4 + \frac{9}{10} a_3^2 L^5 \right).\end{aligned}\quad (100)$$

Potenciální energie vnějších sil se vyjádří jako integrál diferenciálních energií. Diferenciální energie se vyjádří jako diferenciální síla ( $ndx$ ) násobená posunem ( $u$ )

$$d\Pi_e = -undx, \quad (101)$$

$$d\Pi_e = - \int_0^L undx, \quad (102)$$

$$\begin{aligned}\Pi_e &= -n \int_0^L u dx = -n \int_0^L \sum_{i=1}^3 a_i \psi_i dx = -n \int_0^L (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx = \\ &= -n \left( \frac{1}{2} a_1 L^2 + \frac{1}{3} a_2 L^3 + \frac{1}{4} a_3 L^4 \right).\end{aligned}\quad (103)$$

Celková potenciální energie

$$\begin{aligned}\Pi &= \Pi_i + \Pi_e = EA \left( \frac{1}{2} a_1^2 L + a_1 a_2 L^2 + a_1 a_3 L^3 + \frac{2}{3} a_2^2 L^3 + \frac{3}{2} a_2 a_3 L^4 + \frac{9}{10} a_3^2 L^5 \right) \\ &\quad - n \left( \frac{1}{2} a_1 L^2 + \frac{1}{3} a_2 L^3 + \frac{1}{4} a_3 L^4 \right).\end{aligned}\quad (104)$$

Minimum potenciální energie se určí jako nulová hodnota prvních derivací podle váhových koeficientů  $a_1$  až  $a_3$ .

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = EA (a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3) - \frac{1}{2} n L^2 = 0, \quad (105)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = EA \left( a_1 L^2 + \frac{4}{3} a_2 L^3 + \frac{3}{2} a_3 L^4 \right) - \frac{1}{3} n L^3 = 0, \quad (106)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = EA \left( a_1 L^3 + \frac{3}{2} a_2 L^4 + \frac{9}{5} a_3 L^5 \right) - \frac{1}{4} n L^4 = 0. \quad (107)$$

Předchozí rovnice tvoří soustavu rovnic



$$EA \begin{bmatrix} L & L^2 & L^3 \\ L^2 & \frac{4}{3}L^3 & \frac{3}{2}L^4 \\ L^3 & \frac{3}{2}L^4 & \frac{9}{5}L^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}nL^2 \\ \frac{1}{3}nL^3 \\ \frac{1}{4}nL^4 \end{Bmatrix}, \quad (108)$$

jejíž řešením je

$$a_1 = \frac{nL}{EA}, \quad (109)$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} \frac{n}{EA}, \quad (110)$$

$$a_3 = 0 \quad (111)$$

Funkce posunutí

$$u = \frac{nL}{EA}x - \frac{1}{2} \frac{n}{EA}x^2. \quad (112)$$

### Přesné řešení

Geometrické, fyzikální a statické podmínky:

$$\varepsilon_n = u',$$

$$N = EA\varepsilon_n,$$

$$N' + n = 0.$$

Z poslední rovnice vyjádříme

$$N = -\int n dx = -n \int dx = -nx + C_1. \quad (113)$$

Konstantu  $C_1$  určíme z okrajové podmínky

$$N \big|_{x=L} = 0,$$

$$C_1 = nL,$$

$$N = -nx + nL.$$

Z fyzikální podmínky vyjádříme  $\varepsilon_n$  a dosadíme za normálovou sílu

$$\varepsilon_n = \frac{N}{EA} = \frac{n}{EA}(-x + L).$$

Z geometrické podmínky vyjádříme

$$u = \int \varepsilon_n dx + C_2 = \frac{n}{EA} \int -x + L dx + C_2 = \frac{n}{EA} \left( -\frac{x^2}{2} + Lx \right) + C_2. \quad (114)$$

Konstantu  $C_2$  určíme z okrajové podmínky nulového posunu v uložení

$$u \text{ } x=0 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Rovnice (1.95) je totožná s řešením Ritzovou metodou (rovnice 1.93).

Pozn.:

Obsahují-li náhradní funkce přesné řešení, Ritzova metoda (obecně všechny variační metody) je najde.

### 5.1.1. Obecná úprava řešení Ritzovou metodou

Postup řešení Ritzovou metodou lze zobecnit a upravit nezávisle na zvolených bázových funkcích.

Bázovou funkci (přemístění)

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i$$

derivujeme

$$u' = \frac{du}{dx} = \left( \sum_{i=1}^n a_i \psi_i \right)' = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i'. \quad (115)$$

Potenciální energie vnitřních sil bude

$$\Pi_i = \frac{EA}{2} \int_L u'^2 dx = \frac{EA}{2} \int_L \left( \sum_{i=1}^n a_i \psi_i' \right)^2 dx. \quad (116)$$

potenciální energie vnějších sil

$$\Pi_e = -n \int_L u dx = -n \int_L \sum_{i=1}^n a_i \psi_i dx. \quad (117)$$

Minimum potenciální energie se vypočítá derivací celkové potenciální energie podle váhových koeficientů

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = \frac{\partial \Pi_i + \partial \Pi_e}{\partial a_j} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial a_j} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial a_j}. \quad (118)$$

Parciální derivace potenciální energie vnitřních sil (uplatní se pravidla pro derivaci složené funkce)

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial a_j} = \frac{EA}{2} \int_L \sum_{i=1}^n a_i \psi'_i \psi'_j dx = EA \sum_{i=1}^n a_i \int_L \psi'_i \psi'_j dx = \sum_{i=1}^n a_i r_{ij}, \quad (119)$$

kde

$$r_{ij} = \int_L \psi'_i \psi'_j dx. \quad (120)$$

V předchozích vzorcích jsme uvážili skutečnost, že parciální derivace součtu funkcí  $a_1\psi_1 + \dots + a_j\psi_j + \dots + a_n\psi_n$  podle  $a_j$  je rovna  $\psi_j$ . Zároveň platí, že integrace a derivace jsou podle jiných proměnných a jsou tedy na sobě nezávislé.

Parciální derivace potenciální energie vnějších sil

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial a_j} = \int_L \psi_j dx = \rho_j. \quad (121)$$

Vzhledem k tomu, že musíme provést derivace podle všech váhových koeficientů  $a_j$ , dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1j} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{i1} & \dots & r_{ij} & \dots & r_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & \dots & r_{nj} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_i \\ \vdots \\ \rho_n \end{Bmatrix} \quad (122)$$

Vrátíme-li se k předchozímu příkladu, můžeme vyčíslit koeficienty levých stran

$$r_{11} = \int_0^L \psi'_1 \psi'_1 dx = \int_0^L 1 \cdot 1 dx = L,$$

$$r_{12} = r_{21} = \int_0^L \psi'_1 \psi'_2 dx = \int_0^L 1 \cdot 2x dx = L^2,$$

$$r_{13} = r_{31} = \int_0^L \psi'_1 \psi'_3 dx = \int_0^L 1 \cdot 3x^2 dx = L^3,$$

$$r_{22} = \int_0^L \psi'_2 \psi'_2 dx = \int_0^L 2x \cdot 2x dx = \frac{4}{3} L^3,$$

$$r_{23} = r_{32} = \int_0^L \psi_2' \psi_3' dx = \int_0^L 2x \cdot 3x^2 dx = \frac{3}{2} L^4,$$

$$r_{33} = \int_0^L \psi_3' \psi_3' dx = \int_0^L 3x^2 \cdot 3x^2 dx = \frac{9}{5} L^5.$$

Dále vyčíslíme pravé strany

$$\rho_1 = \int_0^L \psi_1 dx = \int_0^L x dx = \frac{1}{2} L^2,$$

$$\rho_2 = \int_0^L \psi_2 dx = \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} L^3,$$

$$\rho_3 = \int_0^L \psi_3 dx = \int_0^L x^3 dx = \frac{1}{4} L^4.$$

Soustava rovnic a její řešení pak je zcela stejné jako v předchozím případě.

### **PŘÍKLAD 12:**

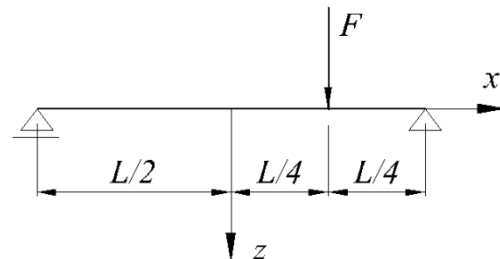
Ohýbaný prut podle obrázku řešte Ritzovou metodou. Jako náhradní funkce volte

$$\psi_1 = x^2 + C_1, \quad (123)$$

$$\psi_2 = x^3 + C_2 x, \quad (124)$$

$$\psi_3 = x^4 + C_3, \quad (125)$$

$$\psi_4 = x^5 + C_4 x. \quad (126)$$



Obrázek 18: Ritzova metoda - ohýbaný prut

Zanedbejte vliv posouvajících sil na potenciální energii. Příklad řešte pro tyto hodnoty:

$$L = 4 \text{ m}, F = 100 \text{ kN}, E = 210 \text{ GPa}, I = 21,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ (I200)}.$$

### **ŘEŠENÍ:**

Náhradní funkce musí splňovat okrajové podmínky

$$w \text{ } x = -L/2 = 0, \quad w \text{ } x = L/2 = 0.$$

Konstanty funkcí po dosazení a vyjádření vychází

$$C_1 = -L^2/4, \quad (127)$$

$$C_2 = -L^2/4, \quad (128)$$

$$C_3 = -L^4/16, \quad (129)$$

$$C_4 = -L^4/16. \quad (130)$$

Potom náhradní funkce a jejich derivace jsou

$$\psi_1 = x^2 - L^2/4, \quad \psi_1' = 2x, \quad \psi_1'' = 2, \quad (131)$$

$$\psi_2 = x^3 - L^2/4x, \quad \psi_2' = 3x^2 - L^2/4, \quad \psi_2'' = 6x, \quad (132)$$

$$\psi_3 = x^4 - L^4/16, \quad \psi_3' = 4x^3, \quad \psi_3'' = 12x^2, \quad (133)$$

$$\psi_4 = x^5 - L^4/16x, \quad \psi_4' = 5x^4 - L^4/16, \quad \psi_4'' = 20x^3. \quad (134)$$

Statické, geometrické a fyzikální podmínky ohýbaného prutu:

Statické podmínky:

$$V' + q = 0,$$

$$M' - V + m = 0$$

Geometrické podmínky:

$$\varepsilon_v = w' + \varphi,$$

$$\varepsilon_m = \varphi'.$$

Fyzikální podmínky:

$$V = GA_k \varepsilon_v,$$

$$M = EI \varepsilon_m.$$

Za předpokladu zanedbání vlivu posouvajících sil na průhyb nosníku bude platit

$$\varepsilon_v = 0 \Rightarrow w' = -\varphi.$$

Předpoklad nulového zkosení by vedl k nulové posouvající síle. Proto tento předpoklad doplníme nekonečně velkou smykovou tuhostí

$$GA_k = \infty,$$

potom posouvající síla bude

$$V = GA_k = \infty \cdot 0,$$

což je matematicky neurčitý výraz, který umožňuje libovolnou hodnotu posouvající síly odpovídající statickým podmínkám.

**Potenciální energie vnitřních sil:**

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \left\{ \int_L^0 V \varepsilon_v dx + \int_L M \varepsilon_m dx \right\} = \frac{EI}{2} \int_L \varepsilon_m^2 dx = \frac{EI}{2} \int_L \varphi'^2 dx = \frac{EI}{2} \int_L -w''^2 dx = \frac{EI}{2} \int_L w''^2 dx \quad (135)$$

**Potenciální energie vnějších sil:**

$$\Pi_e = -Fw \quad x = L/4 \quad . \quad (136)$$

**Minimum potenciální energie:**

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial a_j} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^4 r_{ij} - \rho_j = 0. \quad (137)$$

Koeficienty - levá strana soustavy:

$$r_{ij} = r_{ji} = EI \int_L \psi_i'' \psi_j'' dx, \text{ pro } i = 1 \dots 4 \text{ a } j = 1 \dots 4.$$

$$r_{11} = EI \int_{-L/2}^{L/2} 2 \cdot 2 dx = EI \cdot 4 \cdot x \Big|_{-L/2}^{L/2} = 4EIL,$$

$$r_{12} = r_{21} = EI \int_{-L/2}^{L/2} 2 \cdot 6x dx = EI \cdot 6 \left[ x^2 \right]_{-L/2}^{L/2} = 0,$$

$$r_{13} = r_{31} = EI \int_{-L/2}^{L/2} 2 \cdot 12x^2 dx = EI \cdot 8 \left[ x^3 \right]_{-L/2}^{L/2} = 2EIL^3,$$

$$r_{14} = r_{41} = EI \int_{-L/2}^{L/2} 2 \cdot 20x^3 dx = EI \cdot 5 \left[ x^4 \right]_{-L/2}^{L/2} = 0,$$

$$r_{22} = EI \int_{-L/2}^{L/2} 6x \cdot 6x dx = EI \cdot 12 \left[ x^3 \right]_{-L/2}^{L/2} = 3EIL^3,$$

$$r_{23} = r_{32} = EI \int_{-L/2}^{L/2} 6x \cdot 12x^2 dx = EI \cdot 18 \left[ x^4 \right]_{-L/2}^{L/2} = 0,$$

$$r_{24} = r_{42} = EI \int_{-L/2}^{L/2} 6x \cdot 20x^3 dx = EI \cdot 24 \left[ x^5 \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{3}{2} EIL^5,$$

$$r_{33} = EI \int_{-L/2}^{L/2} 12x^2 \cdot 12x^2 dx = EI \frac{144}{5} \left[ x^5 \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{9}{5} EIL^5,$$

$$r_{34} = r_{43} = EI \int_{-L/2}^{L/2} 12x^2 \cdot 20x^3 dx = EI \frac{240}{6} \left[ X^6 \right]_{-L/2}^{L/2} = 0,$$

$$r_{44} = EI \int_{-L/2}^{L/2} 20x^3 \cdot 20x^3 dx = EI \frac{400}{7} \left[ x^7 \right]_{-L/2}^{L/2} = EI \frac{400}{7 \cdot 64} L^7 = \frac{25}{28} EIL^7.$$

Koeficienty – pravá strana soustavy:

$$\rho_j = F \cdot \psi_j \quad x = L/4, \quad \text{pro } j = 1 \dots 4. \quad (138)$$

$$\rho_1 = F \left( x^2 - \frac{L^2}{4} \right) = F \left( \left( \frac{L}{4} \right)^2 - \frac{L^2}{4} \right) = -\frac{3}{16} L^2,$$

$$\rho_2 = F \left( x^3 - \frac{L^2}{4} x \right) = F \left( \left( \frac{L}{4} \right)^3 - \frac{L^2}{4} \frac{L}{4} \right) = -\frac{3}{64} L^3,$$

$$\rho_3 = F \left( x^4 - \frac{L^4}{16} \right) = F \left( \left( \frac{L}{4} \right)^4 - \frac{L^4}{16} \right) = -\frac{15}{256} L^4,$$

$$\rho_4 = F \left( x^5 - \frac{L^4}{16} x \right) = F \left( \left( \frac{L}{4} \right)^5 - \frac{L^4}{16} \frac{L}{4} \right) = -\frac{15}{1024} L^5.$$

Sestaveno do soustavy rovnic dostáváme

$$EI \begin{bmatrix} 4L & 0 & 2L^3 & 0 \\ 0 & 3L^3 & 0 & \frac{3}{2}L^5 \\ 2L^3 & 0 & \frac{9}{5}L^5 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}L^5 & 0 & \frac{25}{28}L^7 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = F \begin{Bmatrix} -\frac{3}{16}L^2 \\ -\frac{3}{64}L^3 \\ -\frac{15}{256}L^4 \\ -\frac{15}{1024}L^5 \end{Bmatrix}. \quad (139)$$

Dosadíme-li do koeficientů zadané hodnoty rozpětí, zatížení, momentu setrvačnosti a modulu pružnosti dostaneme soustavu rovnic

$$10^6 \begin{bmatrix} 71,904 & 0 & 575,23 & 0 \\ 0 & 862,85 & 0 & 6902,8 \\ 575,23 & 0 & 8283,3 & 0 \\ 0 & 6902,8 & 0 & 65741 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{Bmatrix} -0,3 \\ -0,3 \\ -1,5 \\ -1,5 \end{Bmatrix}. \quad (140)$$

Vyřešením soustavy rovnic dostaneme „váhové“ koeficienty.

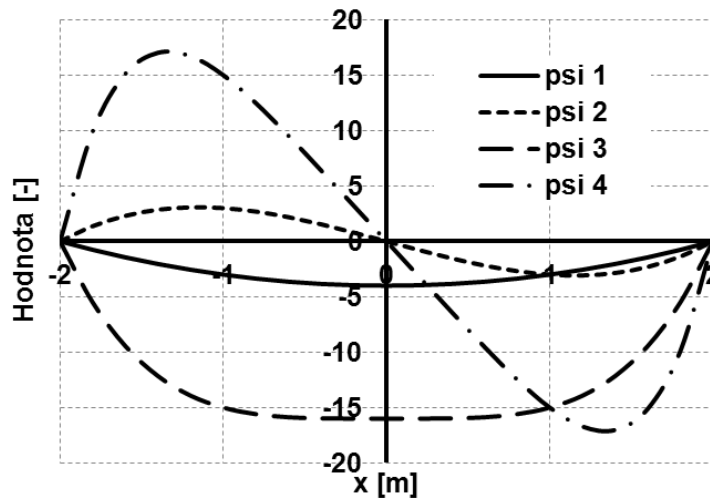
$$a_1 = -0,00612796,$$

$$a_2 = -0,00103219,$$

$$a_3 = 0,00024447,$$

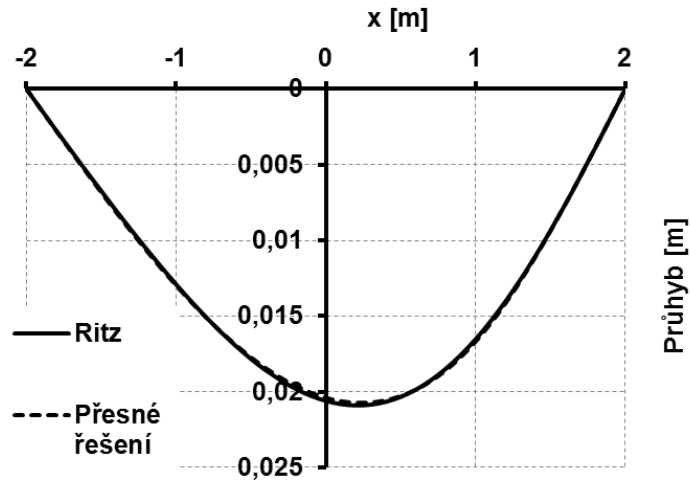
$$a_4 = 0,0008556.$$

Průběhy funkcí jsou zobrazeny na následujících obrázcích.

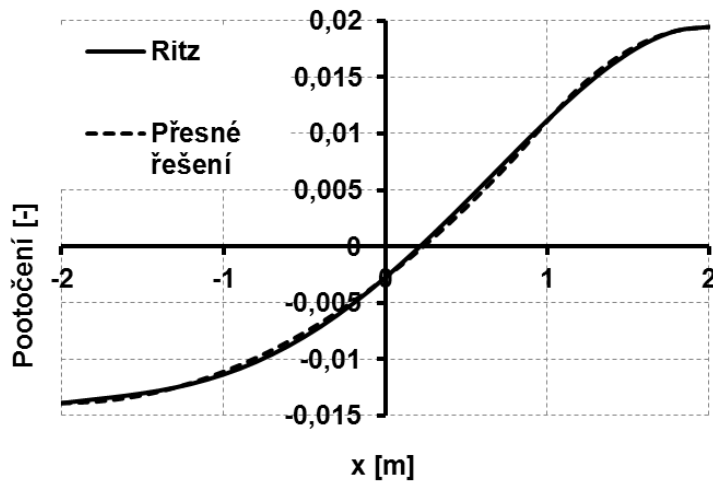


Obrázek 19: Průběhy náhradních funkcí

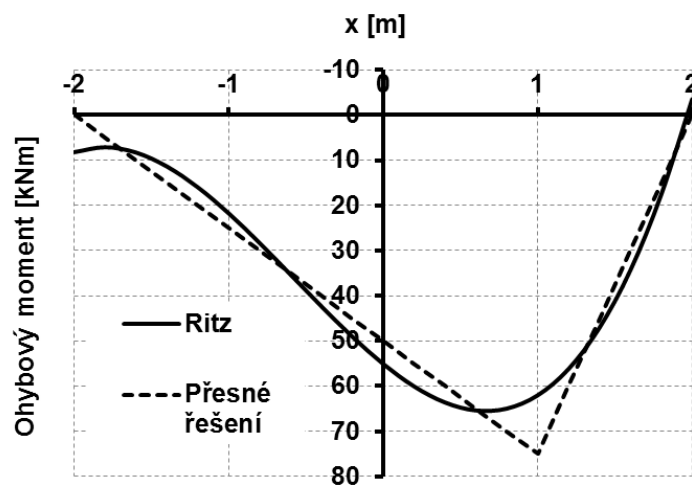




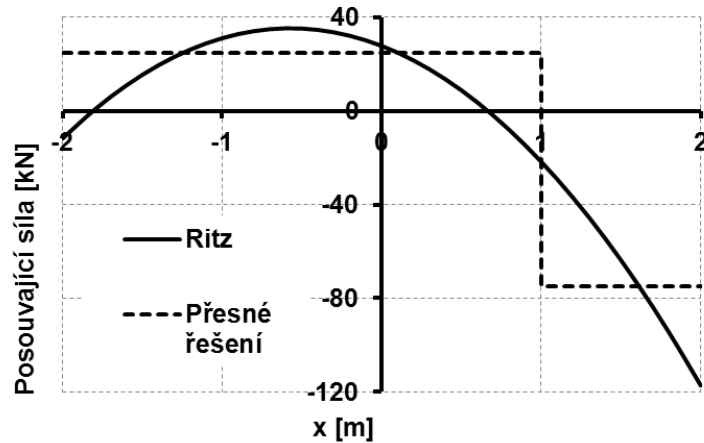
Obrázek 20: Průhyb, srovnání přesného řešení s Ritzovou metodou



Obrázek 21: Pootčení, srovnání přesného řešení s Ritzovou metodou



Obrázek 22: Průběh ohybových momentů, srovnání přesného řešení s Ritzovou metodou



Obrázek 23: Průběh posouvajících sil, srovnání přesného řešení s Ritzovou metodou

Jak je vidět z průběhů jednotlivých veličin, největší přesnosti bylo dosaženo u průhybu a pootočení, v případě ohybových momentů přesnost klesá a posouvající síly jsou vyjádřeny pouze přibližně. Lze učinit závěr, že největší přesnosti je dosaženo u veličiny, která přímo vstupuje do vztahu pro potenciální energii, tj. u průhybu. Ostatní veličiny, které jsou z průhybu odvozeny postupným derivováním, vykazují rostoucí chybu. Největší chyba je tedy u průběhu posouvajících sil.

### **PŘÍKLAD 13:**

Prostý nosník zatížený spojitým rovnoměrným zatížením řešte Ritzovou metodou. Jako náhradní funkci zvolte

$$\psi_1 = \sin \frac{\pi x}{L} \quad (141)$$

Vykreslete průběhy všech statických veličin a porovnejte s přesným řešením.

Zanedbejte vliv posouvajících sil na potenciální energii.

Příklad řešte pro tyto hodnoty:

$$L = 6\text{ m}, \quad q = 8\text{ kN/m}, \quad E = 210\text{ GPa}, \quad I = 21,4 \cdot 10^{-6}\text{ m}^4 \quad (I200).$$

### **ŘEŠENÍ:**

Vzorec pro **potenciální energii vnitřních sil** byl odvozen v předchozím příkladu

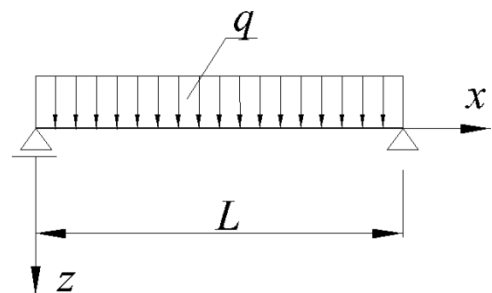
$$\Pi_i = \frac{1}{2} \left\{ \overbrace{\int_L^L V \varepsilon_v dx}^0 + \int_L^L M \varepsilon_m dx \right\} = \frac{EI}{2} \int_L^L \varepsilon_m^2 dx = \frac{EI}{2} \int_L^L \varphi'^2 dx = \frac{EI}{2} \int_L^L -w''^2 dx = \frac{EI}{2} \int_L^L w''^2 dx$$

### **Potenciální energie vnějších sil**

Odvodí se z energie diferenciálního břemene

Středoevropské centrum pro vytváření a realizaci inovovaných  
technicko-ekonomických studijních programů  
Registrační číslo CZ.1.07/2.2.00/28.0301

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.



Obrázek 24: Ritzova metoda, prostý nosník zatížený spojitým rovnoměrným zatížením

$$dF = qdx, \quad (142)$$

$$d\Pi_e = -dFw = -qdxw; \quad (143)$$

po integraci

$$\Pi_e = -\int_0^L qwdx. \quad (144)$$

Pro řešení budeme potřebovat derivace náhradní funkce

$$\psi_1 = \sin \frac{\pi x}{L}, \quad \psi_1' = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L}, \quad \psi_1'' = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (145)$$

Odvodíme jednotlivé koeficienty (jeden pro levou a jeden pro pravou stranu). Odvození je opět uvedeno v předchozím příkladu.

$$r_{ij} = r_{ji} = EI \int_L \psi_i'' \psi_j'' dx, \quad \text{pro } i=1 \text{ a } j=1.$$

$$r_{11} = EI \int_0^L \left( -\frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \cdot \left( -\frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \right) dx = EI \int_0^L \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx = EI \frac{\pi^4}{L^4} \left[ \frac{x}{2} - \frac{1}{4\frac{\pi}{L}} \sin 2\frac{\pi}{L}x \right]_0^L,$$

$$r_{11} = EI \frac{\pi^4}{L^4} \left( \left( \frac{L}{2} - \frac{1}{4\frac{\pi}{L}} \sin 2\frac{\pi}{L}L \right) - 0 \right) = EI \frac{\pi^4}{2L^3} - 0 = EI \frac{\pi^4}{2L^3}, \quad (146)$$

$$\rho_j = \int_0^L q\psi_j dx, \quad \text{pro } j=1, \quad (147)$$

$$\rho_1 = \int_0^L q \sin \frac{\pi x}{L} dx = q \frac{L}{\pi} \left[ -\cos \frac{\pi x}{L} \right]_0^L, \quad (148)$$

$$\rho_1 = -q \frac{L}{\pi} (-1 - 1) = 2q \frac{L}{\pi}. \quad (149)$$

Soustava rovnic se redukuje na jedinou rovnici

$$r_{11} \cdot a_1 = \rho_1, \quad (150)$$

$$EI \frac{\pi^4}{2L^3} a_1 = 2q \frac{L}{\pi}, \quad (151)$$

$$a_1 = \frac{4qL^4}{\pi^5 EI}. \quad (152)$$

Funkce průhybu je

$$w = a_1 \psi_1 = \frac{4qL^4}{\pi^5 EI} \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (153)$$

Porovnejme nyní přesné řešení průhybu a toto přibližné řešení; samozřejmě v rámci přijatých předpokladů, tj. zejména zanedbání vlivu posouvajících sil. Dosadíme-li za  $x$  polovinu rozpětí  $L/2$  dostaneme

$$w\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{4qL^4}{\pi^5 EI} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{4qL^4}{\pi^5 EI}. \quad (154)$$

což je průhyb uprostřed rozpětí. Vyjádříme-li koeficient

$$\frac{4}{\pi^5} = 0,013071,$$

dostaneme

$$w\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0,013071 \frac{qL^4}{EI}. \quad (155)$$

Srovnáme-li se známým vzorcem, dostaneme

$$w\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} = 0,013021 \frac{qL^4}{EI}. \quad (156)$$

Zjistíme, že rozdíl v největším průhybu je minimální.

Dosažením do geometrické podmínky dostaneme funkci pootočení

$$\varphi = -w' = -\frac{4qL^3}{\pi^4 EI} \cos \frac{\pi x}{L}. \quad (157)$$

Použitím geometrické a fyzikální podmínky dostaneme funkci ohybového momentu

$$M = EI \varepsilon_m = EI \varphi' = \frac{4qL^2}{\pi^3} \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (158)$$

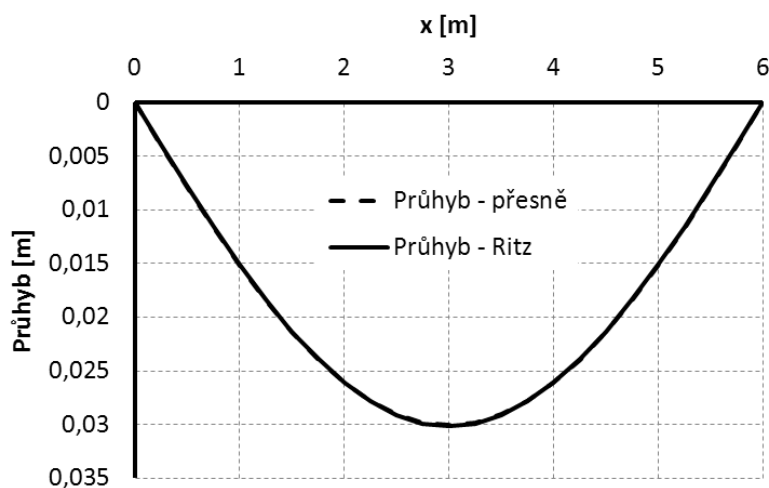
Uplatněním momentové statické podmínky dostaneme funkci posouvající síly

$$V = \frac{4\pi L}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{L} \quad (159)$$

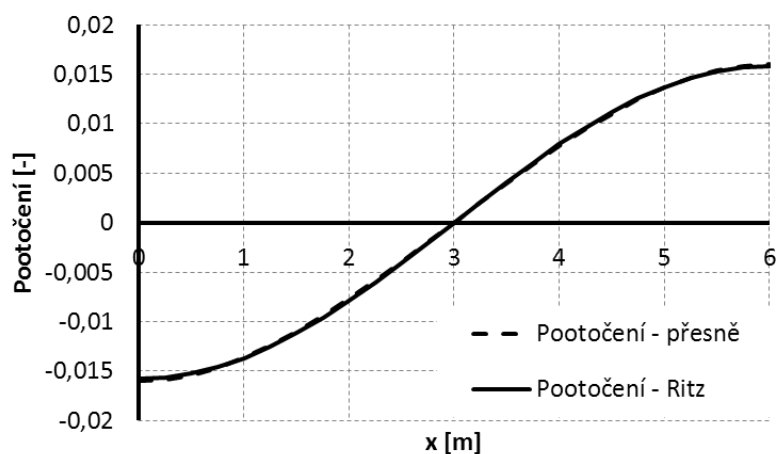
a konečně dosazením do silové statické podmínky rovnováhy dostaneme funkci zatížení

$$q = -V' = \frac{4q}{\pi} \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (160)$$

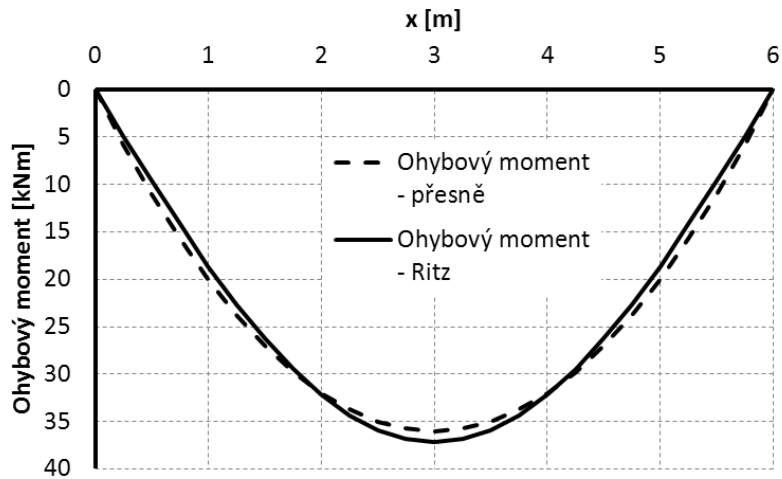
Průběhy sledovaných veličin ukazují grafy.



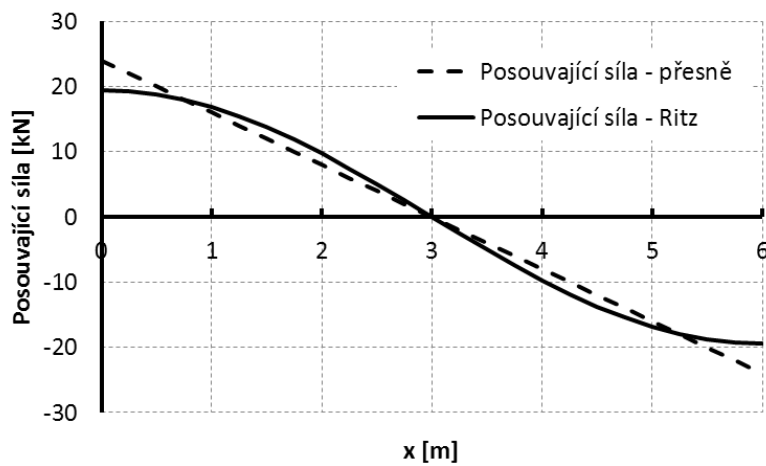
Obrázek 25: Průhyb, srovnání přesného řešení s Ritzovou metodou



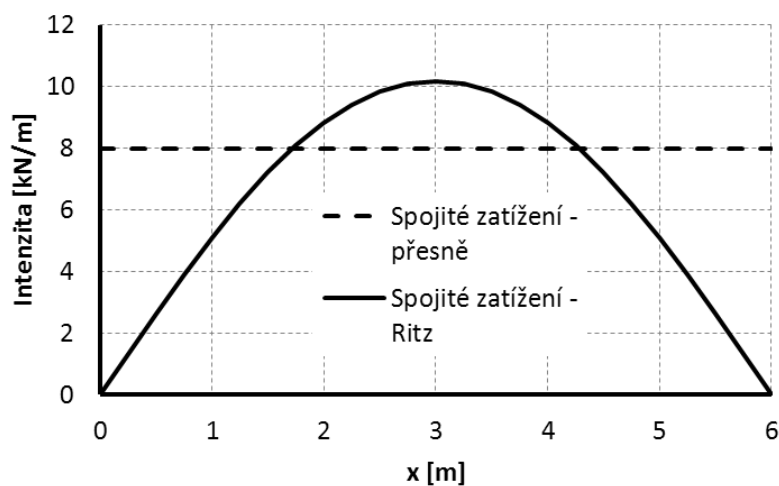
Obrázek 26: Pootočení, srovnání přesného řešení s Ritzovou metodou



Obrázek 27: Ohybový moment, srovnání přesného řešení s Ritzovou metodou



Obrázek 28: Posouvající síla, srovnání přesného řešení s Ritzovou metodou



Obrázek 29: Spojité zatížení, srovnání původního a odvozeného zatížení prostřednictvím řešení Ritzovou metodou

## 5.2. Metoda konečných prvků

Je jednou z variačních metod. Rozdílem oproti Ritzově metodě jsou bazové funkce platné pouze na malé části konstrukce- konečném prvku. Zatímco zpočátku neznámé součinitele mají v případě Ritzovy metody pouze význam váhy, v metodě konečných prvků mají konkrétní fyzikální význam uzlových přemístění (posunů nebo pootočení). Právě hodnoty v uzlech jsou předmětem řešení soustavy rovnic. Metoda konečných prvků předpokládá počítačové zpracování kvůli velkému počtu numerických operací.

### 5.2.1. Prutový prvek tah - tlak

#### **PŘÍKLAD 13:**

Odvoďte prutový konečný prvek tah – tlak.

#### **ŘEŠENÍ:**

Jedná se vlastně o příhradový prvek, jehož jedinou vnitřní silou je síla normálová. Jediné přemístění je podélný (osový) posun. Pro řešení rekapitulujeme statické, geometrické a fyzikální podmínky:

Statická podmínka je

$$N' + n = 0, \quad (161)$$

geometrická podmínka

$$\varepsilon_n = u' \quad (162)$$

A fyzikální podmínka

$$N = EA\varepsilon_n. \quad (163)$$

Potenciální energie vnitřních sil se redukuje na

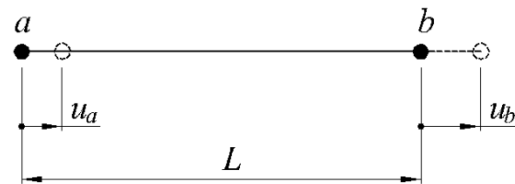
$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L N \varepsilon_n dx = \frac{EA}{2} \int_0^L \varepsilon_n^2 dx = \frac{EA}{2} \int_0^L u'^2 dx. \quad (164)$$

Potenciální energie vnějších sil závisí na druhu zatížení. Zde uveďme pouze případ uzlového zatížení

$$\Pi_e = -R_a u_a - R_b u_b. \quad (165)$$

Uzlové parametry jsou osové posuny  $u_a$  a  $u_b$ . Náhradní funkci posunu zvolme následovně

$$u = u_0 + u_1 x, \quad (166)$$



Obrázek 30: MKP prvek tah - tlak, parametry

Kde  $u_0$  a  $u_1$  jsou neznámé parametry, které určíme z okrajových podmínek

$$u \text{ v } x=0 = u_a \Rightarrow u_0 = u_a \text{ a} \quad (167)$$

$$u \text{ v } x=L = u_b \Rightarrow u_1 = \frac{u_b - u_a}{L}. \quad (168)$$

V tomto případě určení okrajových podmínek vede na dvě rovnice, jejichž řešení je triviální, v obecném případě vede na soustavu lineárních rovnic. Náhradní funkce po dosazení za koeficienty  $u_0$  a  $u_1$  je

$$u = u_a + \frac{u_b - u_a}{L} x. \quad (169)$$

Pro náhradní funkce platí, že počet neznámých koeficientů musí být stejný jako počet okrajových podmínek. V tomto případě pro dva neznámé koeficienty  $u_0$  a  $u_1$  máme dva posuny v uzlech (okrajové podmínky)  $u_a$  a  $u_b$ .

Do výrazu pro potenciální energii potřebujeme první derivaci posunu

$$u' = \frac{u_b}{L} - \frac{u_a}{L}. \quad (170)$$

Dosadíme-li do výrazu pro potenciální energii, dostaneme

$$\Pi_i = \frac{EA}{2} \int_0^L \left( \frac{u_b}{L} - \frac{u_a}{L} \right)^2 dx = \frac{EA}{2L^2} u_b^2 - 2u_a u_b + u_a^2 \int_0^L dx = \frac{EA}{2L} u_b^2 - 2u_a u_b + u_a^2 L. \quad (171)$$

Potenciální energie vnějších sil již uzlové posuny obsahuje a není třeba provádět žádné nahrazení.

Výraz pro potenciální energii vnitřních sil obsahuje průřezovou a materiálovou charakteristiku, délku prutu a uzlové parametry. Průřezové a materiálové charakteristiky, stejně jako délka prutu jsou konstanty, hodnota potenciální energie, a to vnějších i vnitřních sil, se mění pouze v závislosti na uzlových posunech. Při hledání minima potenciální energie je třeba derivovat právě podle uzlových parametrů. První derivace se položí rovny nule.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_a} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial u_a} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial u_a} = \frac{EA}{2L} (-2u_b + 2u_a) - R_a = 0, \quad (172)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_b} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial u_b} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial u_b} = \frac{EA}{2L} (2u_b - 2u_a) - R_b = 0. \quad (173)$$

Maticově zapsáno:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_a \\ R_b \end{Bmatrix}. \quad (174)$$



Symbolický zápis:

$$\mathbf{K}_e \Delta_e = \mathbf{r}_e, \quad (175)$$

Kde  $\mathbf{K}_e$  se nazývá maticí tuhosti prvku,  $\Delta_e$  je vektor uzlových parametrů (přemístění) a  $\mathbf{r}_e$  je vektor uzlových sil. Zapišeme-li výraz pro potenciální energii deformace (1.153) pomocí těchto symbolů, dostaneme

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \Delta_e^T \underset{1,2}{\mathbf{K}_e} \underset{2,2}{\mathbf{K}_e} \underset{2,1}{\Delta_e}. \quad (176)$$

Po provedení předepsaných operací dostaneme zpětně výraz (1.153). Potenciální energie zůstává stále číslem.

### 5.2.2. Odvození prutového MKP prvku tah-tlak maticově

Odvození pomocí maticového počtu se může v případě nejjednoduššího prvku MKP zdát kontraproduktivní, uplatnění tohoto přístupu pro komplikovanější typy prvků však velmi zpřehlední a zjednoduší odvození.

Předpokládáme stejnou náhradní funkci (166) jako v předchozím odvození. Napišme ji maticově

$$\mathbf{u} = \mathbf{M} \mathbf{a}, \quad (177)$$

kde

$$\mathbf{u} = u \quad x, \quad (178)$$

je vektor posunutí, v tomto případě o jednom členu,

$$\mathbf{M} = 1 \quad x, \quad (179)$$

je funkční matice (v tomto jednoduchém případě pouze o jednom řádku);  $\mathbf{a}$  je vektor neznámých parametrů

$$\mathbf{a} = a_0 \quad a_1^T. \quad (180)$$

Dále definujeme vektor uzlových parametrů

$$\Delta_e = u_a \quad u_b^T. \quad (181)$$

Dosazení okrajových podmínek do funkce posunutí symbolicky zapišeme jako

$$\Delta_e = \mathbf{S} \mathbf{a}, \quad (182)$$

kde matice  $\mathbf{S}$  je

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}. \quad (183)$$

Vektor  $\mathbf{a}$  vypočítáme ze vztahu (183)

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1} \Delta_e \quad (184)$$

a dostaneme

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_a \\ \frac{u_b - u_a}{L} \end{Bmatrix} \quad (185)$$

Funkce posunutí se bude rovnat

$$\mathbf{u} = \mathbf{MS}^{-1} \Delta_e. \quad (186)$$

Ve funkcionálu pro potenciální energii vystupuje první derivace posunu podle  $x$ . Ve vztahu (186) to znamená derivovat matici  $\mathbf{M}$ . Dostaneme

$$\mathbf{u}' = \varepsilon_n = \bar{\mathbf{M}} \mathbf{S}^{-1} \Delta_e = \mathbf{B} \Delta_e, \quad (187)$$

kde

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ a} \quad (188)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}. \quad (189)$$

Výraz pro potenciální energii (164) upravíme:

$$\Pi_i = \frac{EA}{2} \int_0^L u'^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{u}'^T EA \mathbf{u}' dx = \frac{1}{2} \int_0^L \Delta_e^T \mathbf{S}^{-1T} \bar{\mathbf{M}}^T EA \bar{\mathbf{M}} \mathbf{S}^{-1} \Delta_e dx = \frac{1}{2} \int_0^L \Delta_e^T \mathbf{B}^T EA \mathbf{B} \Delta_e dx \quad (190)$$

V předchozím výrazu jsme použili pravidlo, že násobek matic je po transpozici násobek transponovaných matic v opačném pořadí.

Výraz za integrálem (190) vpravo je po provedení naznačených operací stále číslo a dokonce platí, že v případě prutového prvku tah-tlak jsou veškeré matice a vektory nezávislé na  $x$ . Můžeme tedy psát

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \Delta_e^T \mathbf{S}^{-1T} \bar{\mathbf{M}}^T EA \int_0^L dx \bar{\mathbf{M}} \mathbf{S}^{-1} \Delta_e = \frac{1}{2} \Delta_e^T \mathbf{B}^T EA L \mathbf{B} \Delta_e = \frac{1}{2} \Delta_e^T \mathbf{K}_e \Delta_e. \quad (191)$$

V předchozím výrazu jsme uvážili, že integrál po délce prvku  $dx$  je roven délce prvku  $L$ . Matici tuhosti můžeme napsat jako

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{S}^{-1T} \bar{\mathbf{M}}^T \mathbf{EALMS}^{-1} = \mathbf{B}^T \mathbf{EALB}. \quad (192)$$

Po provedení naznačených operací, dostaneme

$$\mathbf{K}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (193)$$

což je stejná matice jako ve vzorci (174).

Pro dobré pochopení celého odvození doporučuji čtenáři provést dosazení a vyjádřit veškeré maticové operace.

### **PŘÍKLAD 14:**

Řešte zadanou konstrukci metodou konečných prvků. Sestavte výraz pro potenciální energii, minimalizujte je, vypočtete neznámé posuny, minimum potenciální energie a vnitřní síly. Dosadte:

$$EA_1 = 1,0 \cdot 10^8 \text{ N}, \quad EA_2 = 1,5 \cdot 10^8 \text{ N}, \quad EA_3 = 2,0 \cdot 10^8 \text{ N}$$

$$F = 100 \text{ kN}.$$

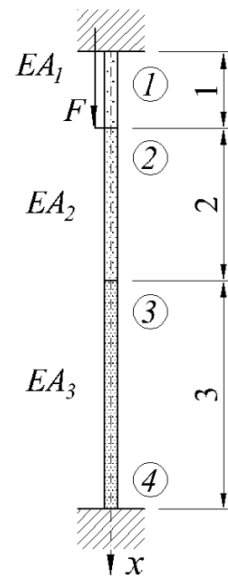
### **ŘEŠENÍ:**

Sestavíme matice tuhosti jednotlivých prvků

$$\mathbf{K}_{e,1} = \frac{EA_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1,0 \cdot 10^8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (194)$$

$$\mathbf{K}_{e,2} = \frac{EA_2}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{4} \cdot 10^8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (195)$$

$$\mathbf{K}_{e,3} = \frac{EA_3}{L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot 10^8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (196)$$



Obrázek 31: Příklad 14 - zadání

Celková potenciální energie konstrukce je součtem potenciální energie deformace všech prvků a potenciální energie zatížení

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \left\{ 1,0 \cdot 10^8 u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2 + \frac{3}{4} \cdot 10^8 u_2^2 - 2u_2u_3 + u_3^2 + \frac{2}{3} \cdot 10^8 u_3^2 - 2u_3u_4 + u_4^2 \right\}. \quad (197)$$

Po roznásobení a dosazení okrajových podmínek ( $u_1 = 0$ ,  $u_4 = 0$ ) dostaneme

$$\Pi_i = \frac{1}{2} 10^8 \left\{ \frac{7}{4} u_2^2 - \frac{3}{2} u_2u_3 + \frac{17}{12} u_3^2 \right\}. \quad (198)$$

Potenciální energie zatížení se vypočte jednoduše jako

$$\Pi_e = -F \cdot u_2. \quad (199)$$

Celková potenciální energie

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e = \frac{1}{2} 10^8 \left\{ \frac{7}{4} u_2^2 - \frac{3}{2} u_2u_3 + \frac{17}{12} u_3^2 \right\} - F \cdot u_2. \quad (200)$$

Hledáme-li minimum, derivujeme podle uzlových parametrů, které jsou v rovnici jediné proměnné. Získané rovnice položíme rovny nule

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = \frac{7}{4} 10^8 u_2 - \frac{3}{4} 10^8 u_3 - 100000 = 0, \quad (201)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = -\frac{3}{4} 10^8 u_2 + \frac{17}{12} 10^8 u_3 = 0. \quad (202)$$

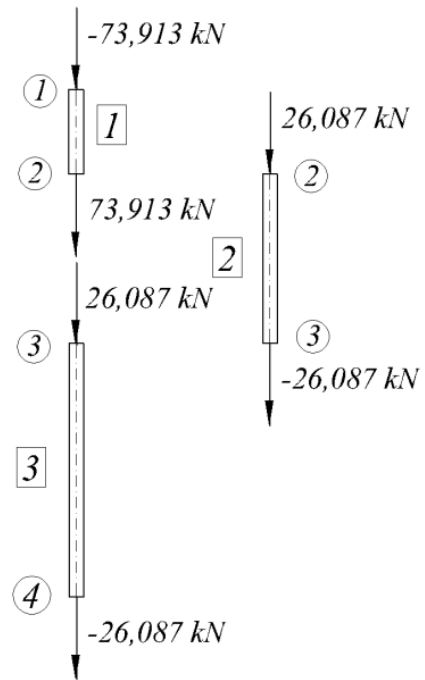
Maticově zapsáno

$$10^8 \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{17}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100000 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (203)$$

Řešení soustavy (v metrech), včetně předem známých posunů, je

$$u_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,000739 \\ 0,000391 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (204)$$

Dosadíme-li získané posuny do rovnice pro potenciální energii, dostaneme



Obrázek 32: Příklad 14, uzlové síly

$$\Pi = -36,957 \text{ J.}$$

Pokud jakkoliv změníme posuny, bude celková potenciální energie větší, jak si může čtenář snadno ověřit.

Dosadíme-li zpětně do základní rovnice prutu

$$\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{r}_e,$$

dostaneme uzlové síly ( $\mathbf{r}_e$ ). Jsou to síly, kterými na prvek působí okolní konstrukce, ať už to jsou okolní prvky, zatížení nebo reakce v podporách. V případě prutových prvků jsou uzlové síly totožné s koncovými účinky známými z deformační metody.

$$\mathbf{r}_{e,1} = 1,0 \cdot 10^8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0,000739 \end{cases}$$

$$\mathbf{r}_{e,1} = \begin{Bmatrix} R_1^1 \\ R_1^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -73913 \\ 73913 \end{Bmatrix}, \quad (205)$$

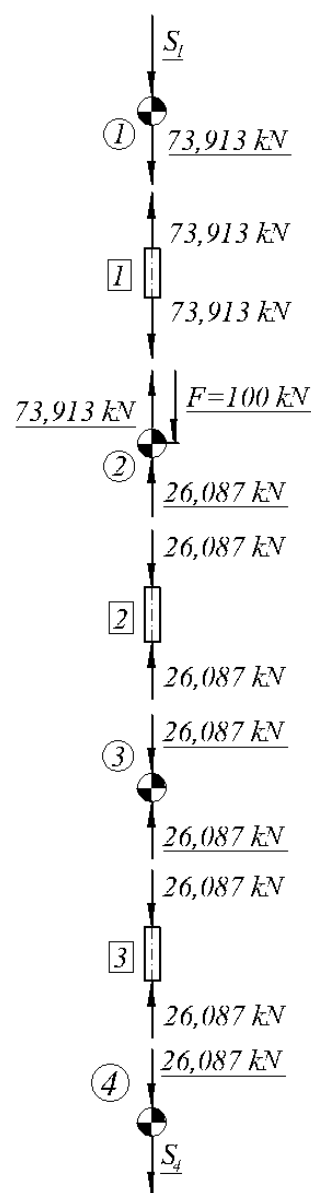
$$\mathbf{r}_{e,2} = \frac{3}{4} \cdot 10^8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} u_2 = 0,000739 \\ u_3 = 0,000391 \end{cases}$$

$$\mathbf{r}_{e,2} = \begin{Bmatrix} R_2^2 \\ R_2^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 26087 \\ -26087 \end{Bmatrix}, \quad (206)$$

$$\mathbf{r}_{e,3} = 1,0 \cdot 10^8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} u_3 = 0,000391 \\ u_4 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{r}_{e,3} = \begin{Bmatrix} R_3^3 \\ R_3^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 26087 \\ -26087 \end{Bmatrix}. \quad (207)$$

Uzlové síly vyjadřují působení styčniců na prut a jsou na každém prvku v rovnováze. Síly, kterými působí prut na styčnice, jsou stejně velké avšak opačného smyslu. Vyjadřují působení „okolí“ na uzel, stejně jako reakce nebo zatížení. Kontrola rovnováhy na styčnicích je na obrázku, kde podtržené síly vyjadřují působení „okolí“ na styčnic (prutů, zatížení a reakcí). Nepodtržené jsou uzlové síly.



Obrázek 33: Příklad 14, rovnováha ve styčnicích

### 5.2.3. Výpočet vnitřních sil pro prutový prvek tah - tlak

Z fyzikální (163) a geometrické podmínky (162) odvodíme

$$N = EA\varepsilon_n = EAu' \quad (208)$$

Dosaďme do předchozí rovnice z (170) a dostaneme

$$N = EA \left( \frac{u_b}{L} - \frac{u_a}{L} \right) \quad (209)$$

Nebo je možno postupovat maticově a vyjádřit

$$N = EAP'S^{-1}\Delta_e \quad (210)$$

Roznásobením dojdeme ke (209).

Normálová síla prvku tah – tlak je konstantní po délce prutu. Tento prvek neumožňuje vyjádřit změnu vnitřní síly po délce prvku. Je to dáno náhradní funkcí, která je lineární.

### **PŘÍKLAD 15:**

Vypočtěte vnitřní síly prutů z příkladu 14.

### **ŘEŠENÍ:**

Pro řešení se použijí rovnice odvozené v předchozím oddíle.

$$N_1 = 73,913 \text{ kN}, \quad (211)$$

$$N_2 = -26,087 \text{ kN}, \quad (212)$$

$$N_3 = -26,087 \text{ kN}. \quad (213)$$

## 5.2.4. Plošný prvek T6

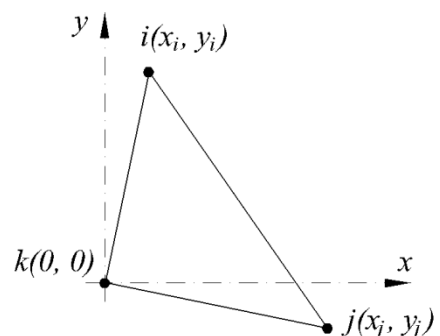
### **PŘÍKLAD 16:**

Odvoďte stěnový prvek podle obrázku.

### **ŘEŠENÍ:**

Prvek bude odvozen za předpokladu konstantní tloušťky a materiálových vlastností po celé ploše prvku.

Na začátku rekapitulujme statické, geometrické a fyzikální podmínky:



Obrázek 34: Prvek T6

**Statické podmínky<sup>1</sup>:**

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad (214)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0. \quad (215)$$

**Geometrické podmínky:**

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (216)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (217)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (218)$$

**Fyzikální podmínky:**

V případě stěny jsou možné dvě varianty – rovinná napjatost a rovinná deformace. Fyzikální podmínky pro rovinnou napjatost jsou

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad (219)$$

A pro rovinnou deformaci

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}. \quad (220)$$

Geometrii prvku ukazuje Obrázek 34. Prvek je trojuzlový, pro snadnější odvození vložíme počátek souřadnic do uzlu  $k$ . V každém uzlu jsou dva stupně volnosti – posun ve směru  $x$  a posun ve směru  $y$ . Celkem tedy existují 3 okrajové podmínky pro funkci posunu ve směru osy  $x$  a tři podmínky ve směru osy  $y$ . To znamená, že pro každý směr je možno použít polynom se třemi neznámými:

<sup>1</sup> Předpokládá se věta o vzájemnosti smykových napětí,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

$$\begin{aligned} u_{x,y} &= a_0 + a_1x + a_2y \\ v_{x,y} &= b_0 + b_1x + b_2y \end{aligned} \quad (221)$$

Maticově vyjádřeno  $\mathbf{u} = \mathbf{Ma}$ ,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}. \quad (222)$$

### Dosažení okrajových podmínek

Dosažíme-li do náhradních funkcí souřadnice uzlů, výsledkem musí být uzlové parametry

$$\begin{aligned} u_i &= a_0 + a_1x_i + a_2y_i \\ v_i &= b_0 + b_1x_i + b_2y_i \\ u_j &= a_0 + a_1x_j + a_2y_j \\ v_j &= b_0 + b_1x_j + b_2y_j \\ u_k &= a_0 \\ v_k &= b_0 \end{aligned} \quad (223)$$

Předchozí rovnice zapišme maticově, jako  $\mathbf{Sa} = \Delta_e$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}. \quad (224)$$

Matice  $\mathbf{S}$  vyjadřuje zapsané souřadnice uzlů, závislé na konkrétním prvku. Pro další odvození potřebujeme vyjádřit inverzní matici  $\mathbf{S}^{-1}$ , abychom získali vztah pro neznámé koeficienty  $\mathbf{a}$  a tím vyjádřili funkce posunů pomocí uzlových parametrů

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1}\Delta_e, \quad (225)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{MS}^{-1}\Delta_e \quad (226)$$

Matice  $\mathbf{S}$  není třeba explicitně vyjadřovat při odvození, u složitějších typů prvků to ostatně ani není možné. V případě prvku  $T6$  to možné je. Práci si podstatně usnadníme, rozdělíme-li matici  $\mathbf{S}$  na dvě samostatné matice, zvlášť pro posun  $u$  a zvlášť pro posun  $v$  podle rovnice



$$\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{u}}. \quad (227)$$

Po rozepsání a dosazení  $a_0 = u_k$  a  $b_0 = v_k$  dostaneme (pro posun  $u$ )

$$\begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i - u_k \\ u_j - u_k \end{Bmatrix}. \quad (228)$$

Obdobný vztah bychom dostali i pro posun  $v$  (koeficienty  $b_0$  a  $b_1$ ). Řešení soustavy (228) je

$$a_1 = b_1 = \frac{-u_i y_j + u_j y_i + u_k (y_j - y_i)}{y_i x_j - y_j x_i},$$

$$a_2 = b_2 = \frac{u_i x_j - u_j x_i + u_k (x_i - x_j)}{y_i x_j - y_j x_i}, \quad (229)$$

Maticově vyjádřeno:

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{y_j}{J} & 0 & \frac{y_i}{J} & 0 & \frac{y_j - y_i}{J} & 0 \\ \frac{x_j}{J} & 0 & -\frac{x_i}{J} & 0 & \frac{x_i - x_j}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{y_j}{J} & 0 & \frac{y_i}{J} & 0 & \frac{y_j - y_i}{J} \\ 0 & \frac{x_j}{J} & 0 & -\frac{x_i}{J} & 0 & \frac{x_i - x_j}{J} \end{bmatrix} \quad (230)$$

kde

$$J = y_i x_j - y_j x_i.$$

### Vyjádření funkcí posunů pomocí uzlových parametrů

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}\mathbf{S}^{-1}\Delta_e = \mathbf{N}\Delta_e \quad (231)$$

Matice  $\mathbf{N}$  není uvedena, její odvození není složité a pro další postup není podstatné.

### Geometrické podmínky

Geometrické podmínky je možno zapsat pomocí operátorové matice  $\mathbf{G}$  :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (232)$$

Symbolicky vyjádřeno

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{M}\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\Delta}_e = \mathbf{G}\mathbf{N}\boldsymbol{\Delta}_e = \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}_e . \quad (233)$$

Podle rovnice (233) je možné dvojí vyjádření poměrných deformací. Buď derivováním z náhradních funkcí nebo derivováním matice  $\mathbf{M}$ . V ostatních maticích a vektorech jsou obsaženy pouze konstanty (vzhledem k proměnným  $x$  a  $y$ ).

Derivováním náhradních funkcí (221) dostaneme

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_1 \\ \varepsilon_y &= b_2 \\ \gamma_{xy} &= a_2 + b_1 \end{aligned} . \quad (234)$$

Matici  $\mathbf{B}$  potom snadno vyjádříme z matice  $\mathbf{S}$  pomocí vztahu (225)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{y_j}{J} & 0 & \frac{y_i}{J} & 0 & \frac{y_j - y_i}{J} & 0 \\ 0 & \frac{x_j}{J} & 0 & -\frac{x_i}{J} & 0 & \frac{x_i - x_j}{J} \\ \frac{x_j}{J} & -\frac{y_j}{J} & -\frac{x_i}{J} & \frac{y_i}{J} & \frac{x_i - x_j}{J} & \frac{y_j - y_i}{J} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (235)$$

**Fyzikální podmínky**

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}_e . \quad (236)$$

Matice  $\mathbf{D}$  je matice tuhosti materiálu, přičemž je možné dosadit vztahy pro rovinnou napjatost nebo rovinnou deformaci. Explicitní vyjádření bude provedeno až v příkladu pro konkrétní čísla.

**Potenciální energie vnitřních sil**

Potenciální energie vnitřních sil jednoho prvku

$$\Pi_{i,e} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA . \quad (237)$$

V předchozím vzorci bylo použito vyjádření objemu jako plochy násobené tloušťkou. To umožňuje předpoklad konstantní tloušťky po ploše prvku.

Pro transpozici vektoru poměrných přetvoření  $\boldsymbol{\varepsilon}$  použijeme matematické pravidlo, že v součinu je třeba všechny vektory a matice transponovat a obrátit jejich pořadí. Potenciální energie se potom vyjádří

$$\Pi_{i,e} = \frac{1}{2} t \int_A \boldsymbol{\Delta}_e^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \boldsymbol{\Delta}_e dA. \quad (238)$$

Vektory uzlových parametrů jsou vždy na souřadnicích  $x$  a  $y$  nezávislé, proto lze potenciální energii vyjádřit

$$\Pi_{i,e} = \frac{1}{2} t \boldsymbol{\Delta}_e^T \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \boldsymbol{\Delta}_e. \quad (239)$$

Matice  $\mathbf{B}$  je nezávislá na souřadnicích  $x$  a  $y$ , stejně jako matice tuhosti materiálu  $\mathbf{D}$ . Za integrálem potom zůstane pouze  $dA$ , což je plocha prvku.

$$\Pi_{i,e} = \frac{1}{2} t \boldsymbol{\Delta}_e^T \begin{matrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{D} & \mathbf{B} & A \\ 1,6 & 6,3 & 3,3 & 3,6 \\ & & & 6,1 \end{matrix} \boldsymbol{\Delta}_e \quad (240)$$

Ačkoliv se zdá předchozí vztah komplikovaný, je dobré si uvědomit, že jeho výsledkem je číslo – potenciální energie vyjádřená v Joulech, jak je vidět ze vzorce (240).

Jednodušeji se dá potenciální energie vnitřních sil jednoho prvku vyjádřit pomocí matice tuhosti prvku

$$\Pi_{i,e} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Delta}_e^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Delta}_e, \quad (241)$$

kde

$$\mathbf{K} = t \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA = t \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} A \quad (242)$$

je matice tuhosti prvku typu (6,6).

### Potenciální energie vnějších sil

Potenciální energii vnějších sil můžeme pro každý případ vyjádřit jako součin působící uzlové síly a posunu příslušného uzlu v příslušném směru – uzlového parametru. Maticově vyjádřeno

$$\Pi_e = -\boldsymbol{\Delta}_e^T \mathbf{F}_e, \quad (243)$$

kde  $\mathbf{F}_e$  je vektor uzlových zatěžujících sil.

### Minimum potenciální energie

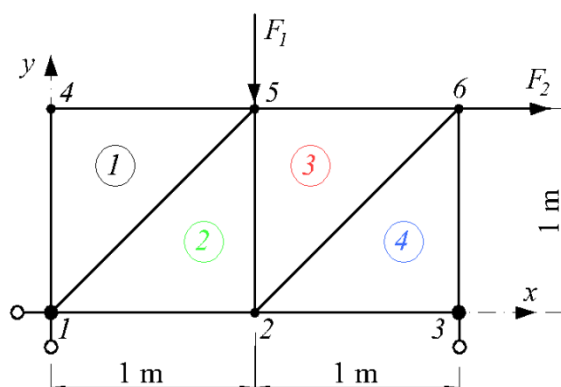
Potenciální energie konstrukce je tvořena součtem potenciální energie všech elementů a veškerých vnějších sil. Její extrém se nalezne pomocí derivací podle všech uzlových parametrů. Symbolicky zapsáno

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial \Delta} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial \Delta} = \mathbf{K}\Delta - \mathbf{F} = 0 \quad (244)$$

### 5.2.5. Aplikace prvku T6

#### **PŘÍKLAD 17:**

Pomocí prvku odvozeného prvku T6 řešte stěnu podle obrázku. Tloušťka stěny je 0,2 m, modul pružnosti  $E = 30 \text{ GPa}$ , součinitel příčné kontrakce  $\nu = 0,2$ . Zatěžovací síly mají velikost  $F_1 = 1000 \text{ kN}$  a  $F_2 = 500 \text{ kN}$ .



Obrázek 35: Stěna - zadání příkladu, diskretizace

#### **ŘEŠENÍ:**

##### **Matice tuhostí prvků**

Matice tuhostí prvků 1 a 3 jsou stejné. Pro prvky 2 a 4 platí totéž (prvky mají stejnou polohu – v matici tuhosti figurují pouze rozdíly kót jednotlivých uzlů, proto nezáleží na konkrétní poloze vyjádřené v souřadnicích  $x$  a  $y$ ).

Pro všechny prvky platí stejná matice tuhosti materiálu (vzhledem k charakteru úlohy uvažujeme rovinnou napjatost)

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1-\nu \end{bmatrix} = 3,125 \cdot 10^{10} \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}. \quad (245)$$

### Matice tuhostí prvků 1 a 3

Souřadný systém umístíme podle obrázku 33. Pro prvek 1 bude platit, že  $i = 4$ ,  $j = 5$  a  $k = 1$ . Pro prvek 3 bude platit  $i = 5$ ,  $j = 6$  a  $k = 2$ .

Jmenovatel pro matici **B**

$$J = y_i x_j - y_j x_i = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1. \quad (246)$$

Plocha prvku je  $0,5 \text{ m}^2$ , tloušťka prvku  $0,2 \text{ m}$ . Podle rovnice (242) se matice tuhosti vypočte součinem

$$\mathbf{K} = t\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{A} =$$

$$= 3,125 \cdot 10^9 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (247)$$

Konstanta před maticovým součinem vznikla vynásobením konstanty před maticí tuhosti materiálu (245) plochou prvku a tloušťkou. Dostaneme

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_3 = 3,125 \cdot 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 1,4 & -0,6 & -1 & 0,4 & -0,4 & 0,2 \\ -0,6 & 1,4 & 0,2 & -0,4 & 0,4 & -1 \\ -1 & 0,2 & 1 & 0 & 0 & -0,2 \\ 0,4 & -0,4 & 0 & 0,4 & -0,4 & 0 \\ -0,4 & 0,4 & 0 & -0,4 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & -1 & -0,2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (248)$$

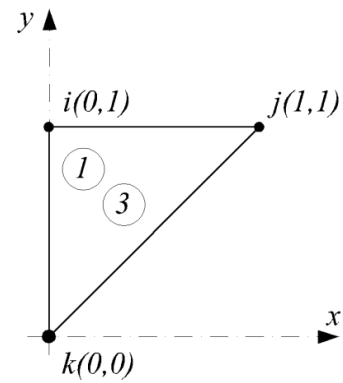
Sestavme ještě vektory uzlových parametrů

$$\Delta_1 = u_4 \quad v_4 \quad u_5 \quad v_5 \quad u_1 \quad v_1^T, \quad (249)$$

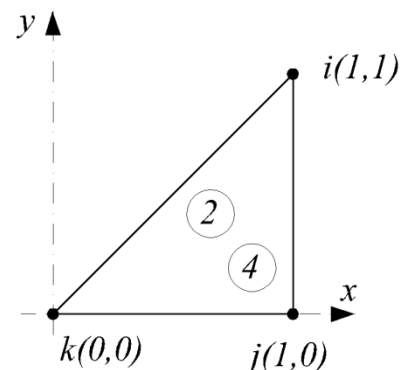
$$\Delta_3 = u_5 \quad v_5 \quad u_6 \quad v_6 \quad u_2 \quad v_2^T. \quad (250)$$

### Matice tuhostí prvků 2 a 4

Souřadný systém umístíme podle obrázku 34. Pro prvek 2 bude platit, že  $i = 5$ ,  $j = 2$  a  $k = 1$ . Pro prvek 4 bude platit  $i = 6$ ,  $j = 3$  a  $k = 2$ .



Obrázek 36: Prvek 1 a 3



Obrázek 37: Prvek 2 a 4

Vypočteme podobně jako předchozí. Jmenovatel

$$J = y_i x_j - y_j x_i = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1. \quad (251)$$

Plocha a tloušťka prvků jsou stejné jako v předchozím případě, matice **B** se přirozeně liší.

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= t\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{A} = \\ &= 3,125 \cdot 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (252)$$

Po provedení naznačených operací dostaneme

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_4 = 3,125 \cdot 10^9 \begin{bmatrix} 0,4 & 0 & -0,4 & 0,4 & 0 & -0,4 \\ 0 & 1 & 0,2 & -1 & -0,2 & 0 \\ -0,4 & 0,2 & 1,4 & -0,6 & -1 & 0,4 \\ 0,4 & -1 & -0,6 & 1,4 & 0,2 & -0,4 \\ 0 & -0,2 & -1 & 0,2 & 1 & 0 \\ -0,4 & 0 & 0,4 & -0,4 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}. \quad (253)$$

Sestavme nyní vektory uzlových parametrů

$$\Delta_2 = u_5 \quad v_5 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_1 \quad v_1^T, \quad (254)$$

$$\Delta_4 = u_6 \quad v_6 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_2 \quad v_2^T. \quad (255)$$

### Sestavení soustavy rovnic

V předchozím textu bylo ukázáno sestavení soustavy rovnic pro jednoduchý případ. Nyní ukažme postup v poněkud komplikovanějším příkladu.

Definujme vektor uzlových přemístění pro celou úlohu

$$\Delta = u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad u_5 \quad v_5 \quad u_6 \quad v_6^T. \quad (256)$$

Každému posunu přiřadme kódové číslo, získáme tak vektor kódových čísel

$$\mathbf{L} = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12^T, \quad (257)$$

To znamená, že

$$u_1 = 1, v_1 = 2, u_2 = 3, v_2 = 4, u_3 = 5, v_3 = 6, u_4 = 7, v_4 = 8, u_5 = 9, v_5 = 10, u_6 = 11, v_6 = 12. \quad (258)$$

Nyní sestavme vektory kódových čísel pro jednotlivé prvky

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_3 = 3,125 \cdot 10^9 \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 1,4 & -0,6 & -1 & 0,4 & -0,4 & 0,2 \\ -0,6 & 1,4 & 0,2 & -0,4 & 0,4 & -1 \\ -1 & 0,2 & 1 & 0 & 0 & -0,2 \\ 0,4 & -0,4 & 0 & 0,4 & -0,4 & 0 \\ -0,4 & 0,4 & 0 & -0,4 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & -1 & -0,2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 & 9 \\ 8 & 10 \\ 9 & 11 \\ 10 & 12 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix} \quad (259)$$

Blíže matice jsou kódová čísla pro prvek 1, vnější jsou kódová čísla prvku 3.

Pro prvky 2 a 4 bude platit

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_4 = 3,125 \cdot 10^9 \begin{bmatrix} 11 & 12 & 5 & 6 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0,4 & 0 & -0,4 & 0,4 & 0 & -0,4 \\ 0 & 1 & 0,2 & -1 & -0,2 & 0 \\ -0,4 & 0,2 & 1,4 & -0,6 & -1 & 0,4 \\ 0,4 & -1 & -0,6 & 1,4 & 0,2 & -0,4 \\ -0 & -0,2 & -1 & 0,2 & 1 & 0 \\ -0,4 & 0 & 0,4 & -0,4 & 0 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 9 & 11 \\ 10 & 12 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix} \quad (260)$$

Blíže matice jsou kódová čísla pro prvek 2, vnější jsou kódová čísla prvku 4.

Pro sestavení matice tuhosti konstrukce využijeme kódová čísla – určují řádek a sloupec v matici tuhosti konstrukce, na která se se přičte příslušný člen matice tuhosti prvku. V následující rovnici jsou barevně odlišeny matice tuhostí jednotlivých prvků. Prvek 1 černě, prvek 2 zeleně, 3 červeně a 4 modře. Připsána jsou i kódová čísla. Z prostorových důvodů je matice napsána poněkud menším fontem.

$$\mathbf{K} = 3,125 \cdot 10^9 \begin{pmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 0,4 & 0 & -1 & 0,2 & & & -0,4 & 0,4 & 0 & -0,4 & & \\
 +1 & +0 & & & & & & & +0 & -0,2 & & \\
 0 & 1 & 0,4 & -0,4 & & & 0,2 & -1 & -0,2 & 0 & & \\
 +0 & +0,4 & & & & & & & -0,4 & +0 & & \\
 -1 & 0,4 & 1,4 & -0,6 & -1 & 0,2 & & & -0,4 & 0,2 & 0 & -0,4 \\
 +1 & +0 & +0,4 & +0 & & & & & -0,4 & +0,4 & +0 & -0,2 \\
 0,2 & -0,4 & -0,6 & 1,4 & 0,4 & -0,4 & & & 0,4 & -1 & -0,2 & 0 \\
 +0 & +0 & +0 & +1 & & & & & +0,2 & -1 & -0,4 & +0 \\
 & & -1 & 0,4 & 1,4 & -0,6 & & & & & -0,4 & 0,2 \\
 & & 0,2 & -0,4 & -0,6 & 1,4 & & & & & 0,4 & -1 \\
 -0,4 & 0,2 & & & & & 1,4 & -0,6 & -1 & 0,4 & & \\
 0,4 & -1 & & & & & -0,6 & 1,4 & 0,2 & -0,4 & & \\
 0 & -0,2 & -0,4 & 0,4 & & & -1 & 0,2 & 1 & 0 & -1 & 0,4 \\
 +0 & -0,4 & -0,4 & +0,2 & & & & +0,4 & +0 & -0,6 & & \\
 -0,4 & 0 & 0,2 & -1 & & & 0,4 & -0,4 & 0 & 0,4 & 0,2 & -0,4 \\
 -0,2 & +0 & +0,4 & -1 & & & & +0 & +1 & -0,6 & +1,4 & \\
 & & 0 & -0,2 & -0,4 & +0,4 & & & -0,6 & +1,4 & -1 & 0,2 & 1 & 0 \\
 +0 & & +0 & -0,4 & & & & & -1 & 0,2 & & +0,4 & +0,4 & +0 \\
 & & -0,4 & 0 & 0,2 & -1 & & & 0,4 & -0,4 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 \\
 -0,2 & & -0,2 & +0 & & & & & & & +0 & +0 & +1 & +1
 \end{pmatrix} \quad (261)$$

Zatěžovací vektor konstrukce se skládá ze známých silových zatížení a neznámých reakcí. Všechny síly se jednoduše vloží do řádků s příslušným přemístěním. Zatěžovací vektor konstrukce potom bude

$$\mathbf{F} = S_{1x} \quad S_{1y} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad S_{3y} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \cdot 10^6 \quad 0,5 \cdot 10^6 \quad 0^T. \quad (262)$$

Matice tuhosti konstrukce je v této chvíli singulární. Ortogonální se stane po doplnění okrajových podmínek. Předepsané okrajové podmínky jsou:

$$u_1 = 0; \quad v_1 = 0; \quad v_3 = 0. \quad (263)$$

Tyto okrajové podmínky se nazývají homogenní. Způsob dosazení objasníme jednoduše například na druhé rovnici

$$3,125 \cdot 10^9 \begin{pmatrix} 0 \cdot u_1 + 1,4v_1 + 0,4u_2 - 0,4v_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot v_3 \\ +0,2u_4 - 1v_4 - 0,6u_5 + 0 \cdot v_5 + 0 \cdot u_6 + 0 \cdot v_6 \end{pmatrix} = S_{1y} \quad (264)$$

Na pravé straně rovnice je reakce, která působí v místě a směru posunu  $v_1$  a jejíž velikost není prozatím známa. Dosadíme-li předepsané okrajové podmínky, budou první, druhý a šestý sčítanec rovny nule. To je stejné pro všechny rovnice. Z matice tuhosti vymizí první, druhý a šestý sloupec. Celá soustava rovnic bude



$$3,125 \cdot 10^9 \begin{bmatrix} -1 & 0,2 & 0 & -0,4 & 0,4 & 0 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,4 & -0,4 & 0 & 0,2 & -1 & -0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 2,8 & -0,6 & -1 & 0 & 0 & -0,8 & 0,6 & 0 & -0,6 \\ -0,6 & 2,8 & 0,4 & 0 & 0 & 0,6 & -2 & -0,6 & 0 \\ -1 & 0,4 & 1,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4 & 0,2 \\ 0,2 & -0,4 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1,4 & -0,6 & -1 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,6 & 1,4 & 0,2 & -0,4 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 & -1 & 0,2 & 2,8 & -0,6 & -1 & 0,4 \\ 0,6 & -2 & 0 & 0,4 & -0,4 & -0,6 & 2,8 & 0,2 & -0,4 \\ 0 & -0,6 & -0,4 & 0 & 0 & -1 & 0,2 & 1,4 & 0 \\ -0,6 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0,4 & -0,4 & 0 & 1,4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 = 0 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{1x} \\ S_{1y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_{3y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \cdot 10^6 \\ 0,5 \cdot 10^6 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (265)$$

Tato soustava má 12 řádků a 9 sloupců. První, druhá a šestá rovnice poslouží k výpočtu reakcí. Zbývá tedy soustava devíti rovnic o devíti neznámých, která je v (265) napsána červeně.

Řešením soustavy (265) je vektor uzlových přemístění (je prezentován včetně předem známých posunů, které nejsou výsledkem řešení soustavy rovnic).

$$\Delta = \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = 2,00217 \cdot 10^{-4} \\ v_2 = -2,57283 \cdot 10^{-4} \\ u_3 = 3,44565 \cdot 10^{-4} \\ v_3 = 0 \\ u_4 = 3,14891 \cdot 10^{-4} \\ v_4 = -1,43478 \cdot 10^{-5} \\ u_5 = 3,00543 \cdot 10^{-4} \\ v_5 = -3,72283 \cdot 10^{-4} \\ u_6 = 3,70326 \cdot 10^{-4} \\ v_6 = -1,55652 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} \text{ m} \quad (266)$$

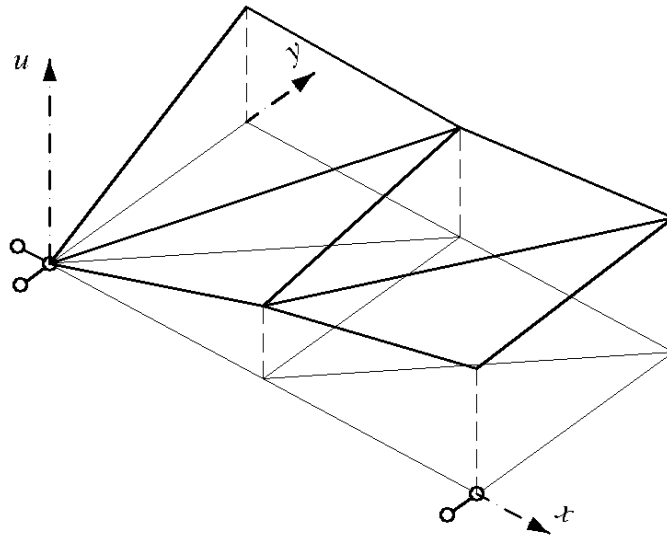
Grafické znázornění posunů prvků  $u$  a  $v$  je na obrázcích Obrázek 38 a Obrázek 39.

### Výpočet reakcí

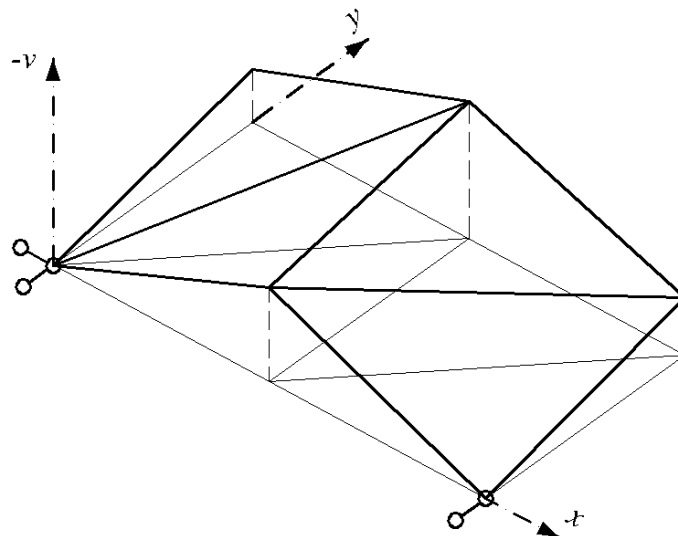
Reakce získáme dosazením vypočtených přemístění do první, druhé a šesté rovnice

$$S_{1x} = -500 \text{ kN}; \quad S_{1y} = 250 \text{ kN}; \quad S_{3y} = 750 \text{ kN}. \quad (267)$$

Správnost si lze snadno ověřit pomocí podmínek rovnováhy napsaných na celé konstrukci.



Obrázek 38: Posuny  $u$  vynesené kolmo na rovinu úlohy



Obrázek 39: Posuny  $v$  vynesené kolmo na rovinu úlohy

### **PŘÍKLAD 18:**

Vypočítejte přetvoření a vnitřní síly stěny podle příkladu 17.

**ŘEŠENÍ:**

Poměrná přetvoření pro každý prvek získáme podle vzorce (233). Matice **B** obsahuje pouze konstanty, z čehož plyne, že poměrná přetvoření a tedy i vnitřní síly budou pro každý prvek konstantní. Pro prvek 1 dostaneme

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\Delta}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_4 = 3,14891 \cdot 10^{-4} \\ v_4 = -1,43478 \cdot 10^{-5} \\ u_5 = 3,00544 \cdot 10^{-5} \\ v_5 = -3,72283 \cdot 10^{-4} \\ u_6 = 0 \\ v_6 = 0 \end{Bmatrix}. \quad (268)$$

Výsledkem je vektor poměrných přetvoření

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,43478 \cdot 10^{-5} \\ -1,43478 \cdot 10^{-5} \\ -4,30435 \cdot 10^{-5} \end{Bmatrix}. \quad (269)$$

Vektor napětí dostaneme pronásobením vektoru přetvoření maticí tuhosti podle vzorce (236). Pro prvek 1 bude platit

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_1 = 3,125 \cdot 10^{10} \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1,43478 \cdot 10^{-5} \\ -1,43478 \cdot 10^{-5} \\ -4,30435 \cdot 10^{-5} \end{Bmatrix}. \quad (270)$$

Po provedeném násobení dostaneme vektor napětí prvku 1

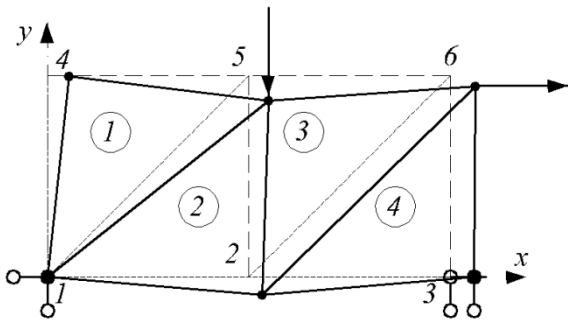
$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -538,044 \\ -538,044 \\ -538,044 \end{Bmatrix} \text{ kPa}. \quad (271)$$

Pro ostatní prvky obdobně dostaneme

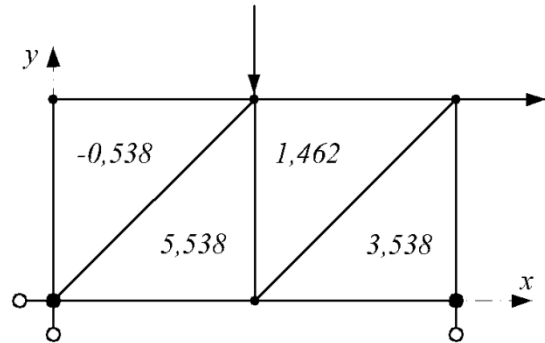
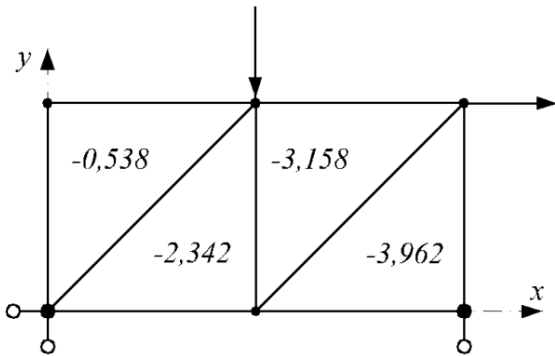
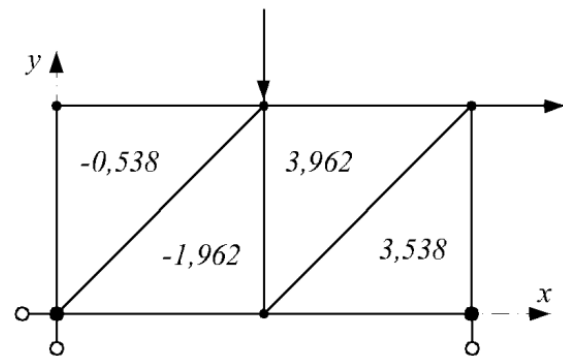
$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{Bmatrix} 2,00217 \cdot 10^{-4} \\ -1,15 \cdot 10^{-4} \\ -1,56957 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} - ; \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{Bmatrix} 5,53804 \\ -2,34239 \\ -1,96196 \end{Bmatrix} \text{ MPa}, \quad (272)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{Bmatrix} 6,97826 \cdot 10^{-5} \\ -1,15 \cdot 10^{-4} \\ 3,16957 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{Bmatrix} 1,46196 \\ -3,15761 \\ 3,96196 \end{Bmatrix} \text{ MPa} , \quad (273)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_4 = \begin{Bmatrix} 1,44348 \cdot 10^{-4} \\ -1,55652 \cdot 10^{-4} \\ 2,83043 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\sigma}_4 = \begin{Bmatrix} 3,53804 \\ -3,96196 \\ 3,53804 \end{Bmatrix} \text{ MPa} . \quad (274)$$



Obrázek 41: Deformovaná konstrukce

Obrázek 40: Napětí  $\sigma_x$ Obrázek 43: Napětí  $\sigma_y$ Obrázek 42: Napětí  $\tau_{xy}$ 

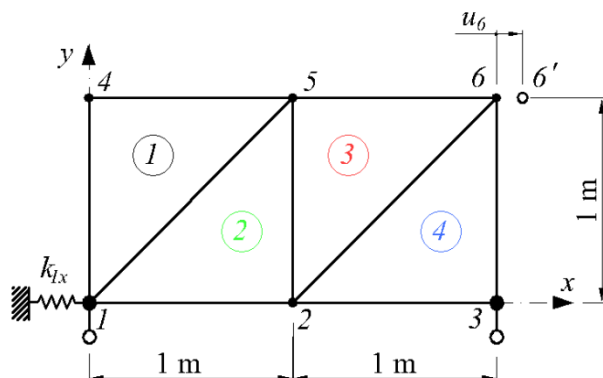
## 5.2.6. Zadaná přemístění a pružné podpory

### **PŘÍKLAD 19:**

S využitím řešení příkladu 17 řešte stěnu podle obrázku. Zatížení je zadaným vodorovným posunem uzlu 6, který činí 5 mm. Tuhost vodorovné podpory v uzlu 1 je 2000 MN/m.

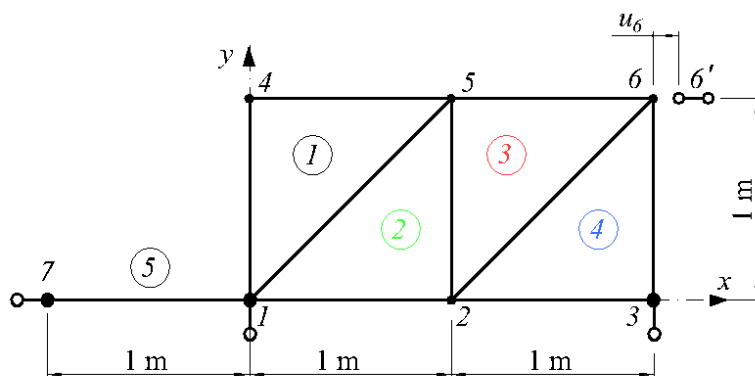
**ŘEŠENÍ:**

V tomto příkladu chybí klasické silové zatížení. Vynucený posun uzlu 6 však vyvolá napjatost. Naším úkolem je toto napětí vypočítat.



Obrázek 44: Pružně podepřená stěna - zadání příkladu

Pružnou podporu v uzlu 1 můžeme nahradit příhradovým prutem o tuhosti  $EA$  rovné zadané tuhosti a délce jeden metr. Vynucený posun uzlu 6 zohledníme jako posun podpory ve směru  $x$ . Výpočetní model ukazuje Obrázek 45.



Obrázek 45: Výpočetní model

Přidaný prut nahrazující podporu je příhradový prut. Proto stačí v novém uzlu 7 pouze vodorovná pevná podpora. Přibude tedy pouze jediný stupeň volnosti -  $u_7$ , kterému přiřadíme kódové číslo 13. Matice tuhosti přidaného prvku a jeho kódová čísla budou

$$2 \cdot 10^9 \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{13} \quad (275)$$

Matici tuhosti přidaného prvku (prvku č. 5) není třeba transformovat – lokální souřadný systém není oproti globálnímu pootočen. K matici tuhosti konstrukce (261) přičteme matici tuhosti přidávaného prvku (275):

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\
 \left[ \begin{array}{cccccccccccc}
 +2 \cdot 10^9 & & & & & & & & & & & & & -2 \cdot 10^9 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
 -2 \cdot 10^9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +2 \cdot 10^9
 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \end{array} \quad (276)
 \end{array}$$

Vynucený posun uzlu 6 je zadané přemístění podpory, jak je ukázáno na Obrázek 45. Rovnice (264) ukazuje vyjádření nulového přemístění podpory. Napišme nyní opět druhou rovnici, ve které vyjádříme známý posun a přidáme člen pro dodaný stupeň volnosti  $u_7$

$$3,125 \cdot 10^9 \begin{pmatrix} 0 \cdot u_1 + 1,4v_1 + 0,4u_2 - 0,4v_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot v_3 + 0,2u_4 \\ -1v_4 - 0,6 \cdot 0,005 + 0 \cdot v_5 + 0 \cdot u_6 + 0 \cdot v_6 + 0 \cdot u_7 \end{pmatrix} = S_{1y} \cdot \quad (277)$$

Člen matice tuhosti, který násobíme známým posunem, můžeme převést do zatížení

$$3,125 \cdot 10^9 \begin{pmatrix} 0 \cdot u_1 + 1,4v_1 + 0,4u_2 - 0,4v_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot v_3 + 0,2u_4 \\ -1 \cdot v_4 + 0 \cdot v_5 + 0 \cdot u_6 + 0 \cdot v_6 + 0 \cdot u_7 \end{pmatrix} = S_{1y} + 9,375 \cdot 10^6 \cdot \quad (278)$$

Podobně lze upravit všechny rovnice a získáme tak upravenou soustavu rovnic (jsou vynechány sloupce násobené nulovým posunem)

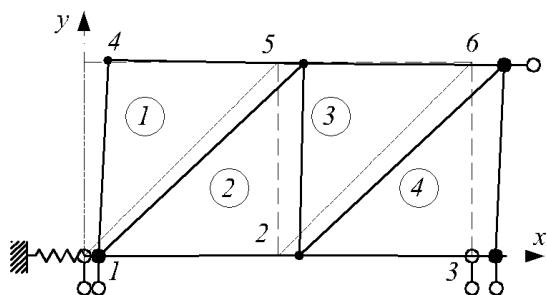
$3,125 \cdot 10^9 \cdot$ 

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccc}
 1 & 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 12 \\
 2,04 & -1 & 0,2 & 0 & -0,4 & 0,4 & 0 & -0,6 & 0 \\
 0 & 0,4 & -0,4 & 0 & 0,2 & -1 & -0,6 & 0 & 0 \\
 -1 & 2,8 & -0,6 & -1 & 0 & 0 & -0,8 & 0,6 & -0,6 \\
 0,2 & -0,6 & 2,8 & 0,4 & 0 & 0 & 0,6 & -2 & 0 \\
 0 & -1 & 0,4 & 1,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \\
 0 & 0,2 & -0,4 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 -0,4 & 0 & 0 & 0 & 1,4 & -0,6 & -1 & 0,4 & 0 \\
 0,4 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 1,4 & 0,2 & -0,4 & 0 \\
 0 & -0,8 & 0,6 & 0 & -1 & 0,2 & 2,8 & -0,6 & 0,4 \\
 -0,6 & 0,6 & -2 & 0 & 0,4 & -0,4 & -0,6 & 2,8 & -0,4 \\
 0 & 0 & -0,6 & -0,4 & 0 & 0 & -1 & 0,2 & 0 \\
 0 & -0,6 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0,4 & -0,4 & 1,4 \\
 -0,64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 u_1 \\
 v_1 = 0 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 u_3 \\
 v_3 = 0 \\
 u_4 \\
 v_4 \\
 u_5 \\
 v_5 \\
 u_6 = 0,005 \\
 v_6 \\
 u_7 = 0
 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l}
 0 \\
 S_{1y} \\
 0 \\
 9,375 \cdot 10^6 \\
 6,250 \cdot 10^6 \\
 S_{3y} - 6,250 \cdot 10^6 \\
 0 \\
 0 \\
 1,563 \cdot 10^6 \\
 -3,125 \cdot 10^6 \\
 S_{6x} - 2,188 \cdot 10^6 \\
 0 \\
 S_{7x}
 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \quad (279)$$

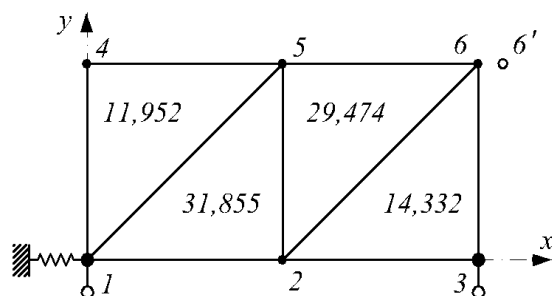
Kde člen 1,1 vzniknul přičtením tuhosti pružné podpory vydělené konstantou vytknutou před integrálem k původnímu členu, hodnota na 13. řádku, 1. sloupci je právě zadaná tuhost podpory vydělená konstantou vytknutou před integrál. V soustavě rovnic (279) slouží černě napsané řádky pro výpočet reakcí, řešená soustava rovnic je psaná červeně. Jejím řešením je vektor přemístění (napsaný kompletně, včetně zadaných posunů)

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l}
 u_1 = 2,19034 \cdot 10^{-3} \\
 v_1 = 0 \\
 u_2 = 3,26519 \cdot 10^{-3} \\
 v_2 = 5,99962 \cdot 10^{-5} \\
 u_3 = 3,79341 \cdot 10^{-3} \\
 v_3 = 0 \\
 u_4 = 3,68262 \cdot 10^{-3} \\
 v_4 = 3,18710 \cdot 10^{-4} \\
 u_5 = 4,00133 \cdot 10^{-3} \\
 v_5 = -2,17447 \cdot 10^{-4} \\
 u_6 = 0,005 \\
 v_6 = -3,47914 \cdot 10^{-4} \\
 u_7 = 0
 \end{array} \right\} \quad (280)$$

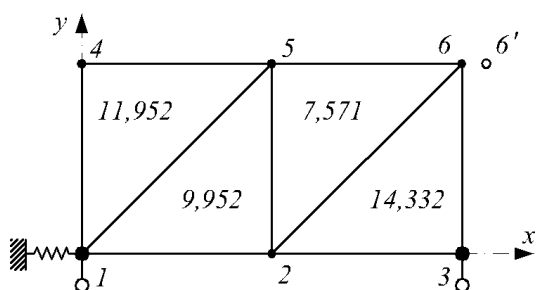
Poměrná přetvoření a napětí se vypočtou podle postupu uvedeném v předchozím příkladu. Výsledky jsou uvedeny na Obrázek 47 až Obrázek 49.



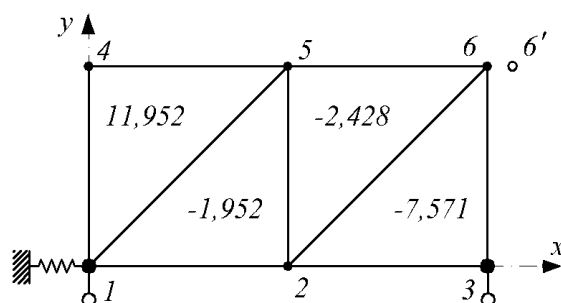
Obrázek 46: Deformovaná konstrukce



Obrázek 47: Napětí  $\sigma_x$



Obrázek 49: Napětí  $\sigma_y$



Obrázek 48: Napětí  $\tau_{xy}$



## 6. Dodatek A - přetvárná práce vnitřních sil na prutu

Pro vyjádření přetvárné práce vnitřních sil prutu budeme potřebovat geometrické a fyzikální vztahy pro prut. Připomeňme, že geometrické podmínky popisují vztah mezi přemístěními a poměrnými deformacemi a fyzikální (konstitutivní) podmínky popisují vztah mezi vnitřními silami a deformacemi.

Na začátku zopakujme statické podmínky rovnováhy

$$N' + n = 0, \quad (281)$$

$$V' + q = 0, \quad (282)$$

$$M' - V + m = 0. \quad (283)$$

Geometrické podmínky jsou v případě rovinného prutu tři

$$\varepsilon_n = \frac{du}{dx} = u', \quad (284)$$

$$\varepsilon_v = \frac{dw}{dx} + \varphi = w' + \varphi, \quad (285)$$

$$\varepsilon_m = \frac{d\varphi}{dx} = \varphi', \quad (286)$$

kde  $\varepsilon_n$  je poměrné délkové přetvoření těžištní osy prutu,  $\varepsilon_v$  je zkosení a  $\varepsilon_m$  je poměrné pootočení neboli křivost. Proměnné  $u$ ,  $w$  a  $\varphi$  jsou potom přemístění v pořadí posun ve směru podélné osy prutu, posun ve směru příčném k podélné ose prutu (průhyb) a pootočení průřezu. Geometrický význam úhlů je na obrázku Obrázek 50. Je zřejmé, že žádná z těchto proměnných není uvažována jako izolovaná hodnota, ale vždy jako funkce proměnné  $x$ .

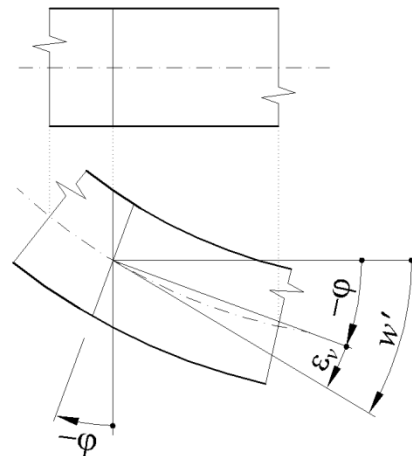
Fyzikální (konstitutivní) podmínky jsou (za předpokladu platnosti Navier-Bernoulliho hypotézy o rovinnosti průřezu před a po deformaci)

$$N = EA\varepsilon_n, \quad (287)$$

$$V = GA_x\varepsilon_v, \quad (288)$$

$$M = EI\varepsilon_m. \quad (289)$$

Kde  $N$ ,  $V$ ,  $M$  jsou funkce vnitřních sil,  $E$  je modul pružnosti (Youngův),  $G$  je modul pružnosti ve smyku a  $A$ ,  $A_x$  a  $I$  jsou průřezové charakteristiky a to plocha průřezu, smyková plocha a moment setrvačnosti k ose  $y$ .



Obrázek 50: Význam úhlů na deformovaném prutu

Často se zanedbává vliv smykové deformace na přetvoření prutu. V rovnici (285) se smykové přetvoření  $\varepsilon_v$  položí rovno nule. Dostaneme tak jednoduchý vztah mezi pootočením průřezu a tečnou k ohybové čáře

$$\varphi = -w'. \quad (290)$$

Problém tohoto zjednodušení však je obsažen v rovnici (288), ze které, na základě provedeného zjednodušení, plyne, že posouvající síla by byla za všech okolností nulová

$$V = GA_x \cdot 0. \quad (291)$$

Takové zjednodušení je samozřejmě nepřijatelné. Předpokládejme tedy, že posouvající síla je nenulová, avšak zkosení  $\varepsilon_v$  je nulové. Potom smyková tuhost  $GA_x$  musí být nekonečná.

$$V = GA_x \varepsilon_v = \infty \cdot 0 = \text{neurčitý výraz} \quad (292)$$

Posouvající síla je za těchto předpokladů neurčitým výrazem a může nabývat libovolné hodnoty. Určí se z podmínek rovnováhy.

Při odvození přetvárné práce vnitřních sil prutu vyjdeme z odvozeného vzorce pro přetvárnou práci napětí

$$L_i = -\frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} dV =$$

$$= \int_V \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} dV$$

z kterého použijeme pouze členy pro napětí  $\sigma_x$  a  $\tau_{zx}$  (pro prut v rovině  $xz$ ). Vliv obou napětí vyjádříme zvlášť

$$L_i = -\frac{1}{2} \left\{ \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV + \int_V \tau_{zx} \gamma_{zx} dV \right\}. \quad (293)$$

V případě prutu můžeme práci vnitřních sil vyjádřit zvlášť pro práci v průřezu a po délce prutu

$$L_i = -\frac{1}{2} \left\{ \int_L \int_A \sigma_x \varepsilon_x dA dx + \int_L \int_A \tau_{zx} \gamma_{zx} dA dx \right\}. \quad (294)$$

Předchozí rovnici upravíme

$$L_i = \int_L L_{i,\sigma} dx + \int_L L_{i,\tau} dx, \quad (295)$$

kde

$$L_{i,\sigma} = -\frac{1}{2} \int_A \sigma_x \varepsilon_x dA \quad \text{a} \quad (296)$$

$$L_{i,\tau} = -\frac{1}{2} \int_A \tau_{xz} \gamma_{xz} dA. \quad (297)$$

Vypočteme nyní přetvárnou práci normálových ( $L_{i,\sigma}$ ) a smykových ( $L_{i,\tau}$ ) napětí v průřezu.

Přetvoření  $\varepsilon_x$  můžeme psát jako rovnici přímky

$$\varepsilon_x = \varepsilon_n + \varepsilon_m z. \quad (298)$$

Napětí  $\sigma_x$  určíme podle Hookeova zákona

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \varepsilon_n + E \varepsilon_m z. \quad (299)$$

Dosaďme nyní do rovnice (296)

$$L_{i,\sigma} = -\frac{1}{2} \int_A \sigma_x \varepsilon_x dA = -\frac{E}{2} \int_A (\varepsilon_n + \varepsilon_m z)^2 dA. \quad (300)$$

Předchozí vztah upravíme

$$L_{i,\sigma} = -\frac{E}{2} \int_A \varepsilon_n^2 + 2\varepsilon_n \varepsilon_m z + \varepsilon_m^2 z^2 dA = -\frac{E}{2} \left( \int_A \varepsilon_n^2 dA + 2 \int_A \varepsilon_n \varepsilon_m z dA + \int_A \varepsilon_m^2 z^2 dA \right). \quad (301)$$

Poměrná přetvoření  $\varepsilon_n$  - poměrné délkové přetvoření osy prutu) a  $\varepsilon_m$  - poměrné pootočení – křivost, jsou vzhledem k ploše průřezu nezávislé (jsou to integrální veličiny), mění se pouze ve směru osy  $x$ . Proto je můžeme vytknout před integrály

$$L_{i,\sigma} = -\frac{E}{2} \left( \varepsilon_n^2 \int_A dA + 2\varepsilon_n \varepsilon_m \int_A z dA + \varepsilon_m^2 \int_A z^2 dA \right) = -\frac{E}{2} \varepsilon_n^2 A + 2\varepsilon_n \varepsilon_m S + \varepsilon_m^2 I. \quad (302)$$

kde  $A$  je průřezová plocha,  $S$  je statický moment plochy k ose  $y$  a  $I$  je moment setrvačnosti ke stejné ose. Pokud jsou poměrná přetvoření vyjádřena k těžištní ose prutu, je statický moment  $S$  roven nule. Potom se vztah zjednoduší na

$$L_{i,\sigma} = -\frac{1}{2} EA \varepsilon_n^2 + EI \varepsilon_m^2. \quad (303)$$

Dosaďme-li zpětně z fyzikálních podmínek (rovnice (287) a (289)), dostaneme

$$L_{i,\sigma} = -\frac{1}{2} N \varepsilon_n + M \varepsilon_m . \quad (304)$$

Pro odvození přetvárné práce smykových vnitřních sil předpokládejme, že budou vypadat podobně jako pro přetvárnou práci závislou na normálových napětích

$$L_{i,\tau} = -\frac{1}{2} V \varepsilon_v = -\frac{1}{2} \frac{1}{GA_k} V^2 = -\frac{1}{2} GA_k \varepsilon_v^2 . \quad (305)$$

V tomto vzorci je klíčová veličina  $A_k$  - smyková průřezová plocha.

Stejnou přetvárnou práci můžeme v duchu předchozích úvah vyjádřit

$$L_{i,\tau} = -\frac{1}{2} \int_A \tau_{zx} \gamma_{zx} dA = -\frac{1}{2G} \int_A \tau_{zx}^2 dA . \quad (306)$$

Pro vyjádření smykového napětí ve smyku za ohybu použijme známý Grashofův vzorec

$$\tau_{zx} = V \frac{\bar{S}}{I \cdot t} , \quad (307)$$

kde  $\bar{S}$  je statický moment nad nebo pod rovinou místa, kde určujeme napětí,  $I$  je moment setrvačnosti a  $t$  je tloušťka průřezu v daném místě. Grashofův vzorec poskytuje přesné výsledky jenom za předpokladu, že na průřezu vznikají pouze svislá smyková napětí  $\tau_{zx}$ . V mnoha průřezích však vznikají i vodorovné složky smykových napětí ( $\tau_{xy}$ ). Pro tyto průřezy je vyjádření smykové plochy složitější. Dosadíme-li Grashofův vzorec do (1.203), dostaneme

$$L_{i,\tau} = -\frac{1}{2G} \int_A V^2 \frac{\bar{S}^2}{I^2 t^2} dA = -\frac{V^2}{2GI^2} \int_A \frac{\bar{S}^2}{t^2} dA . \quad (308)$$

Porovnáme-li vyjádření přetvárné práce smykových sil průřezu podle vzorců (1.202) a (1.205), dostaneme

$$-\frac{1}{2} \frac{V^2}{GA_k} = -\frac{1}{2} \frac{V^2}{GI^2} \int_A \frac{\bar{S}^2}{t^2} dA . \quad (309)$$

Po úpravě

$$\frac{1}{A_k} = \frac{1}{I^2} \int_A \frac{\bar{S}^2}{t^2} dA , \quad (310)$$

což je obecný vzorec, který je možno vyjádřit pro různé typy průřezů.

## Obdélník

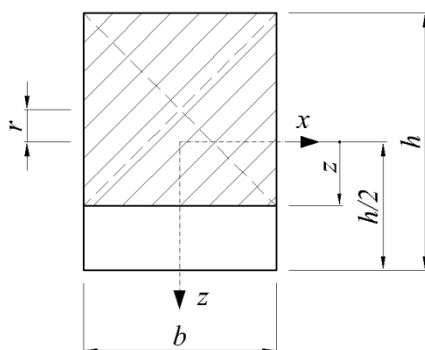
Předpokládejme rozměry obdélníka  $b$ ,  $h$ ; tloušťka  $t$  je konstantní a je rovna šířce průřezu  $b$ . Plochu odřezané části (na obr. Obrázek 51 šrafované) nazvěme  $A_r$ .

Moment setrvačnosti je

$$I = \frac{1}{12}bh^3, \quad (311)$$

Statický moment plochy je

$$S = A_r \cdot r = b \left( \frac{h}{2} + z \right) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + z \right) - z \right) = b \left( \frac{h}{2} + z \right) \left( \frac{h}{4} - \frac{z}{2} \right) = b \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right). \quad (312)$$



Obrázek 51: Smyková plocha obdélníka

Ze vzorce (1.209) plyne, že statický moment „odřezané“ plochy má jednu nezávisle proměnnou – souřadnici  $z$ . Integrál ve vzorci (1.205) se pak redukuje z plošného na jednorozměrný

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_\kappa} &= \frac{1}{\frac{1}{12}bh^3} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{b \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)^2}{b^2} dz = \frac{b}{\frac{1}{12}bh^3} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{h^4}{64} - \frac{h^2 z^2}{8} + \frac{z^4}{4} \right) dz = \\ &= \frac{b}{\frac{1}{12}bh^3} \left( \frac{h^4}{64} z \Big|_{-h/2}^{h/2} - \frac{h^2}{24} [z^3]_{-h/2}^{h/2} + \frac{1}{20} [z^5]_{-h/2}^{h/2} \right) = \frac{144}{bh^6} \left( \frac{h^5}{120} \right) = \frac{6}{5bh} \end{aligned} \quad (313)$$

Smyková plocha pro obdélník vychází

$$A_\kappa = \frac{5}{6}bh = \frac{A}{1,2}. \quad (314)$$

Přetvárná práce vnitřních sil rovinného prutu bude

$$L_i = -\frac{1}{2} \left\{ \int_L N \varepsilon_n dx + \int_L M \varepsilon_m dx + \int_L V \varepsilon_v dx \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \int_L \frac{N^2}{EA} dx + \int_L \frac{M^2}{EI} dx + \int_L \frac{V^2}{GA_k} dx \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \int_L EA \varepsilon_n^2 dx + \int_L EI \varepsilon_m^2 dx + \int_L GA_k \varepsilon_v^2 dx \right\} \quad (315)$$

Pro potenciální energii vnitřních sil bude zápis podobný, vynechají se znaménka „minus“.

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \left\{ \int_L N \varepsilon_n dx + \int_L M \varepsilon_m dx + \int_L V \varepsilon_v dx \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \int_L \frac{N^2}{EA} dx + \int_L \frac{M^2}{EI} dx + \int_L \frac{V^2}{GA_k} dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_L EA \varepsilon_n^2 dx + \int_L EI \varepsilon_m^2 dx + \int_L GA_k \varepsilon_v^2 dx \right\} \quad (316)$$

Zjednodušíme nyní poslední část rovnice (316) pro předpoklad zanedbání vlivu posouvajících sil.  $\varepsilon_v$  bude nulové a poslední člen integrálu (316) vymizí. Za poměrné délkové přetvoření těžištní osy prutu  $\varepsilon_n$  dosadíme z geometrické podmínky (284) a za křivost  $\varepsilon_m$  dosadíme z geometrických podmínek (286) a (290). Dostaneme

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \left( EA \int_L u' dx + EI \int_L -w'' dx \right). \quad (317)$$

Rovnice (315) a (316) představují tři alternativní zápisy. Podobně lze odvodit přetvárnou práci pro ostatní typy úloh (desky, stěny, skořepiny, prostorové úlohy).

## 7. Dodatek B - extrém funkce a funkcionálu

### 7.1. O problému extrému obecně

Problém extrémů je zajímavý problém, který v běžném životě řešíme často a obvykle intuitivně. Chůze v přímém směru vyjadřuje snahu po minimalizaci úsilí dostat se z jednoho bodu do druhého. Cesta nejmenšího odporu je příslovečná, stejně jako minimalizace vložené práce pro dosažení úspěchu. Všechny tyto případy jsou hledáním extrému, konkrétně minima.

Variační počet je matematickým vyjádřením hledání extrému. Potenciální energie je určitý integrál a hledání jeho extrému je považováno čistě za doménu variačního počtu [3], zatímco problém extrému funkce je považován za obor diferenciálního počtu. Historicky však byly tyto problémy popsány současně a teprve Lagrange je oddělil svým objevem variačního počtu. Klasickou úlohou je hledání brachystochrony – křivky nejrychlejšího spádu mezi dvěma body. Nejedná se zde o klasickou úlohu nalezení minima funkce, neboť právě tu funkci hledáme. Jedná se o úlohu variačního počtu. Řešením úlohy není přímka, ale cykloida. Toto řešení bylo objeveno Janem Bernoullim a nezávisle na něm Newtonem a Leibnitzem.

Při řešení diferenciální rovnice tedy hledáme funkci, která vyhovuje rovnici a okrajovým podmínkám, při hledání extrému funkce hledáme bod na funkci, kde funkce nabývá extrému. Při řešení funkcionálu hledáme funkci, která zaručí minimum funkcionálu a vyhoví okrajovým podmínkám úlohy.

Zamysleme se nyní obecně nad problematikou extrému na jednoduché funkci popisující krajinu

$$z = f(x, y), \quad (318)$$

kde  $x$  a  $y$  vyjadřují polohopis a  $z$  nadmořskou výšku daného bodu. Předpokládejme nyní, že chceme najít nejvyšší bod krajiny. O funkci  $f(x, y)$  předpokládejme, že je spojitá a diferencovatelná.

Otázka maxima nebo minima spočívá ve své podstatě na porovnávání. Jestliže řekneme, že jsme na vrcholu hory, musíme dokázat, že všechny okolní body jsou pod námi. Tady se setkáváme s prvním charakteristickým omezením hledání extrémů. V širším okolí mohou existovat vyšší body. Jsme spokojeni, když je náš vlastní vrchol nejvyšší ve srovnání s bezprostředním okolím, i když to není maximum ve srovnání s libovolně širokým okolím. Mluvíme o lokálním maximu (minimu) oproti absolutnímu maximu (minimu).

Rozhodnutí o lokálním extrému činíme v matematice prozkoumáním infinitesimálního, to znamená libovolně malého okolí. Je zřejmé, že na vrcholu hory musí mít všechny body infinitesimálního okolí stejnou výšku, což znamená, že tečna musí mít nulovou směrnici pro libovolný směr. Bude-li v nějakém směru tečna kladná, znamená to, že sousední bod je výše. Bude-li pro libovolný směr tečna záporná, znamená to, že v protějším směru je kladná, tudíž můžeme očekávat vyšší bod.

Vidíme, že při hledání maxima musí být směrnice tečny pro libovolný směr nulová. Pouze tato podmínka zaručuje extrém (ať už minimum nebo maximum). Důsledně vzato, ani tato podmínka není zárukou extrému. Může se totiž jednat o sedlo, které zaručuje minimum v jednom směru a maximum v jiném. Nulová směrnice tečny je tedy podmínka nutná, nikoliv dostačující pro existenci lokálního extrému. Kromě této podmínky je třeba další, která rozhodne, zda se jedná o minimum, maximum nebo sedlový bod. Říkáme, že funkce má **stacionární hodnotu** v jistém bodě, jestliže rychlost změny funkce v každém možném směru z tohoto bodu vymizí. Platí, že pro problémy lineární mechaniky je dostatečné nalezení stacionárního bodu potenciální energie.

## 7.2. Stacionární hodnota funkce

Hledejme pro začátek stacionární bod funkce jedné proměnné. Z matematiky je známo, že pro stacionární bod platí, že první derivace musí být rovna nule. Podle definice derivace bude platit

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0. \quad (319)$$

Tato rovnice vyjadřuje požadavek nulové směrnice tečny pro stacionární bod. Vynásobíme-li rovnici (319) výrazem  $\Delta x$ , dostaneme

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) - f(x) = 0 \quad (320)$$

a po malé úpravě

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x). \quad (321)$$

Rovnice vyjadřuje podmínku nulové změny ve funkčních hodnotách pro malou změnu nezávisle proměnné. Podobně je dán stacionární bod funkcionálu jeho nulovou změnou při variaci vstupujících funkcí.

## 7.3. Variace funkce a stacionární hodnota

„Variace“ znamená infinitezimální změnu, analogicky s diferenciální změnou v diferenciálním počtu. Avšak oproti diferenciálnímu počtu znamená změnu funkce jako celku., tj. je to rozdíl mezi funkcí  $y_1(x)$  blízkou dané funkci  $y(x)$ , tedy  $\delta y(x) = y_1(x) - y(x)$ . Neměníme tedy nezávisle proměnnou  $x$ . Za funkce vzájemně blízké pokládáme takové, jež se málo liší nejen ve svých funkčních hodnotách, ale též v hodnotách svých derivací až do určitého stupně, podle typu úlohy. Křivku *b*) na Obrázek 52 nemůžeme pokládat za blízkou k dané funkci ani tehdy, kdyby rozdíl samotných pořadnic byl dostatečně malý, neboť rozdíly v derivacích jsou u obou křivek značné.

Uvažujme kuličku, která je v klidu v nejnižším bodě misky. Aktuální přemístění kuličky je nula. Posuňme kuličku na sousední pozici, abychom viděli, jak se změní potenciální energie. Takový posun se nazývá „virtuální posun“. Termín „virtuální“ znamená, že přemístění bylo úmyslně uděleno v jakém-



koliv kinematically přípustném směru. Taková virtuální a infinitesimální změna pozice je jednoduše zvána „variace“ pozice. Odpovídající změna dané funkce  $F$  - která v našem příkladu představuje potenciální energii kuličky – je určena touto variací.

Symbol pro variaci  $\delta$  zavedl Lagrange, aby byl zdůrazněn její virtuální charakter. Stejně jako symbol  $d$  v diferenciálním počtu odkazuje variace  $\delta$  k infinitesimální změně. Symbol  $d$  odkazuje ke skutečné změně,  $\delta$  k virtuální změně. Protože v problémech variací určitých integrálů (potenciální energie) musí být oba typy infinitesimálních změn uvažovány naráz, je velmi důležité, odlišit obě veličiny.

Definice variace ukažme na funkci  $n$  proměnných

$$F = F(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (322)$$

Proměnné  $u_1, u_2, \dots, u_n$  mohou být zobrazeny jako pravoúhlé souřadnice bodu  $P$  v prostoru o  $n$  dimenzích. Jestliže vykreslíme hodnotu funkce v jedné další přidané dimenzi, dostaneme plochu v prostoru o  $n+1$  dimenzích. Předpokládáme, že  $F$  je spojitá a diferencovatelná funkce proměnných  $u_k$ .

Napišme teď infinitesimální virtuální změnu našich souřadnic ve formě

$$\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n \quad (323)$$

Odpovídající změnu funkce  $F$  vyjádříme pomocí pravidel diferenciálního počtu

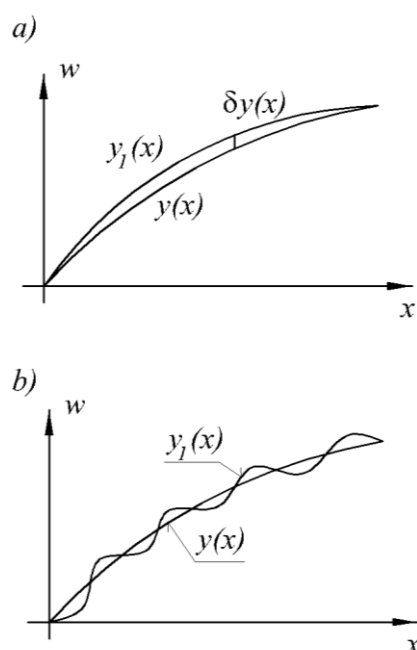
$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2} \delta u_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_n} \delta u_n \quad (324)$$

Tento výraz se nazývá **první variace** funkce  $F$ . Má-li mít tento výraz nulovou hodnotu (za předpokladu nenulových variací  $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n$ ) potom musí platit

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_i} \delta u_i = 0 \quad (325)$$

Protože ale uvedená sumace musí platit pro libovolné variace  $\delta u_i$ , musí být nulová každá derivace funkce  $F$ .

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = 0 \quad (326)$$



Obrázek 52: Variace funkce

pro všechna  $i$ . Charakter variací je virtuální a tudíž omezený pouze okrajovými podmínkami. Jestliže je rovnice (326) splněna, výraz na pravé straně (324) vymizí a funkce  $F$  tedy bude mít stacionární hodnotu. Rovnice (326) jsou tedy nutné i dostačující.

Nutná a postačující podmínka, že funkce  $F$  o  $n$  proměnných bude mít stacionární hodnotu v jistém bodě  $P$  je, že  $n$  parciálních derivací funkce  $F$  podle všech  $n$  proměnných bude nula v bodě  $P$ .

Jestliže podrobíme variaci určitou funkci, změní se hodnota funkcionálu  $F$  o přírůstek  $\Delta F$  [1]. Je-li funkcí, kterou podrobíme variaci, extrémála, tedy funkce splňující podmínku extrému, v našem případě minima funkcionálu  $F$ , tedy platí-li  $F|_y = \min$ , potom bude variace funkcionálu nulová

$$\delta F = 0 \tag{327}$$

## 8. Dodatek C – Požadavky na náhradní funkce pro prvky MKP

Náhradní funkce pro MKP prvky je možno volit ze široké třídy funkcí. Jejich volbou však zásadně ovlivníme přesnost řešení. Pro stavebně mechanické úlohy se náhradní funkce volí obvykle ve tvaru polynomů. Má to dva důvody. Prvním je, že matematické operace s polynomy jsou poměrně jednoduché (zejména derivování a integrování) a dobře naprogramovatelné.

Druhým důvodem je přesnost aproximace, kterou lze jednoduše měnit podle počtu členů polynomu, které se uplatní v příslušné náhradní funkci. Vyšší stupeň polynomu lépe vystihne skutečný tvar deformační křivky. Pokud je v náhradní funkci obsaženo přesné řešení, metoda konečných prvků je najde (podobně jako v Ritzově metodě, jak bylo ukázáno v příkladu 11). Obecně však přesné řešení neznáme a námi zvolené náhradní funkce představují aproximaci skutečné deformace. K minimu potenciální energie se přibližujeme shora – to znamená, že vytvořený model je vždy tužší, než je skutečnost. Snažíme se proto alespoň zajistit konvergenci metody k přesnému řešení. Model můžeme zpřesnit dvěma cestami, buď zvětšením stupně aproximačního polynomu, nebo zhuštěním sítě (blíže viz [5]).

Přesto nelze zvolit libovolný aproximační polynom či jinou funkci. Musí být splněny následující požadavky:

1. Stupeň náhradního polynomu musí mít nenulové spojité derivace až do řádu  $m$ , což je řád derivace obsažené ve výrazu pro potenciální energii. Každá tato derivace proto musí být nenulová a spojitá. Prvky splňující tato kritéria se nazývají **kompletní**. Minimální stupeň polynomu pro ohýbaný prut je  $m = 2$ , protože ve výrazu pro potenciální energii

$$\Pi_i = \frac{EI}{2} \int_L w''^2 dx \quad (328)$$

figuruje druhá derivace průhybové křivky  $w$ . Druhá derivace polynomu druhého stupně je konstanta – je tedy nenulová a spojitá.

2. Funkce přemístění musí umožňovat stav, za kterého jsou poměrná přetvoření konstantní

$$\varepsilon = konst.. \quad (329)$$

V tomto požadavku je zahrnut i stav, kdy  $\varepsilon = 0$ , což vyjadřuje přemístění prvku jako tuhého tělesa. Prvky splňující tyto požadavky nazýváme kompletní. V jejich aproximačních polynomech proto musí být obsažen konstantní člen a další člen nebo členy, které to umožní.

Pro ohýbaný prut, kde se zanedbává práce posouvajících sil je náhradní funkce polynom 3. řádu, který obsahuje 4 neznámé koeficienty

$$w = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3. \quad (330)$$

Derivováním podle vzorce (290) získáme pootočení

$$\varphi = -a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2. \quad (331)$$

Pro vyjádření přemístění jako tuhého tělesa potřebujeme konstantní členy v obou rovnicích – to znamená členy s  $a_0$  a  $a_1$ .

Odvodíme nyní křivost a ohybový moment podle vzorců (286) a (289)

$$\varepsilon_m = -2a_2 + 6a_3x \Rightarrow M = EI\varepsilon_m = -EI(2a_2 + 6a_3x). \quad (332)$$

Konstantní křivost (ohybový moment) vyjadřuje člen s  $a_2$ . Derivováním podle (283) a položením spojitého momentového zatížení rovno nule dostaneme vztah pro posouvající sílu

$$V = M' = EIa_3. \quad (333)$$

Náhradní polynom tedy umožňuje takový ohybový stav, kdy je posouvající síla konstantní. Je přitom vidět, že pro dobré řešení potřebujeme všechny členy náhradního polynomu. Vynechání libovolného členu a jeho nahrazení členem s vyšší mocninou  $x$  paradoxně omezí přesnost řešení zejména v jednodušších deformačních stavech.

Z předchozích úvah plyne, že při libovolném stupni náhradního polynomu je třeba zaručit i „jednoduché“ deformační stavy prvku. Je proto vhodné, obsahuje-li náhradní polynom stupně  $m$  všechny menší mocniny. Pro funkce dvou proměnných se postupuje pomocí Pascalova trojúhelníka

konstantní člen	1	
lineární členy	$x \quad y$	
kvadratické členy	$x^2 \quad xy \quad y^2$	
kubické členy	$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$	(334)
kvartické členy	$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$	
	...atd...	

- Náhradní funkce musí být geometricky invariantní vzhledem k souřadným osám. Jinými slovy, žádný směr nesmí být preferován. Z Pascalova trojúhelníka je tedy třeba vybírat symetricky vzhledem ke svislé ose. Například vybereme kompletní kvadratický polynom

$$u = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2, \quad (335)$$

nebo bikvadratický polynom

$$u = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7xy^2 + a_8x^2y^2. \quad (336)$$

- Požadavek **kompatibility** (spojitosti) deformací na celé řešené oblasti  $\Omega$ . Aproximační polynomy musí být voleny tak, aby na styku prvků byla zaručena spojitost v hodnotách a derivacích až do řádu  $m-1$ . Zároveň musí být splněno, že přemístění na dotyku dvou prvků je závislé pouze na

parametrech deformace uzlů, ležících na této linii. Takto bude zaručeno, že při deformaci nedojde ke vzniku mezer či překrytí prvků.

Pro prutový prvek je tato podmínka splněna automaticky, protože uzlový parametr je první derivaci průhybu.

Pro stěnový prvek  $T6$  je tato podmínka splněna rovněž. Do funkcionálu potenciální energie vstupují první derivace posunů. Stačí tedy spojitost funkcí posunů na hranách prvků. Ta je zaručena, protože funkce posunů tvoří rovinu. Spojnice posunů v uzlech tedy tvoří přímku, která je společná pro sousední prvky – viz Obrázek 38 a Obrázek 39.

5. Aproximační funkce by měly umožnit plnění podmínek rovnováhy. V případě ohýbaného prutu jsou to rovnice (282) a (283), ve kterých se spojitá zatížení položí rovny nule (zatížení se v MKP aplikuje přímo na uzly, náhradní funkce tedy musí vyhovovat i prvku bez zatížení). V případě prutového prvku bez vlivu práce posouvajících sil je momentová podmínka rovnováhy (283) splněna automaticky (je z ní odvozena posouvající síla). Do silové podmínky rovnováhy (282) dosadíme z (333)

$$V' = EI6a_3' = 0. \quad (337)$$

Statická podmínka rovnováhy je tedy splněna. Takto odvozený prut pak představuje v rámci přijatých předpokladů přesné řešení.

Pokud aproximační funkce nesplňují statické podmínky samy o sobě, mohou to být další podmínky, které, kromě okrajových podmínek, vstupují do výpočtu neznámých koeficientů  $a_i$ .

6. Uzlové parametry mohou být posuny, pootočení nebo jejich derivace. Nesmí ale dojít ke směšování typu parametrů. Derivace posunu či pootočení může být násobkem vnitřní síly. V případě ohýbaného prutu jsou uzlové parametry příčný posun a jeho první derivace, což je

$$w' = -\varphi. \quad (338)$$

Pokud bychom zvolili jako uzlový parametr druhou derivaci průhybu, potom podle vztahů (290), (286) a (289) platí

$$w'' = -\varepsilon_m = -\frac{M}{EI}. \quad (339)$$

Při takové volbě parametrů se z deformační varianty MKP stává smíšená varianta. Bude třeba zadávat silové okrajové podmínky. Druhým, závažnějším nedostatkem ovšem je, že na styku dvou prvků o nestejných průřezových nebo materiálových vlastnostech nebude splněna podmínka rovnováhy. Na hranici obou prvků bude společná druhá derivace průhybu, tedy křivost. Ohybový moment se získá pronásobením křivosti průřezovými a materiálovými charakteristikami, které jsou rozdílné pro oba prvky. Z toho potom plyne různá vnitřní síla pro oba prvky a tedy nesplnění statických podmínek.

## 9. Literatura

[1] Šmiřák, S., Energetické principy a variační metody v teorii pružnosti, Ústav stavební mechaniky FAST VUT v Brně, Brno 1998.

[2] Gambhir, M., L., Stability Analysis and Design of Structures, Springer-Verlag, Berlín 2010.

[3] Lanczos, C., The Variational Principles of Mechanics, University of Toronto Press, Toronto 1970, ISBN 978-0-486-65067-8.

[4] Rektorys, K., Přehled užití matematiky II, Nakladatelství Prometheus, 7. vydání, Praha 2000, ISBN 80-7196-181-7.

[5] Teplý, B., Metoda konečných prvků, Vysoké učení technické v Brně, Brno, 1991, ISBN 80-214-0234-2.