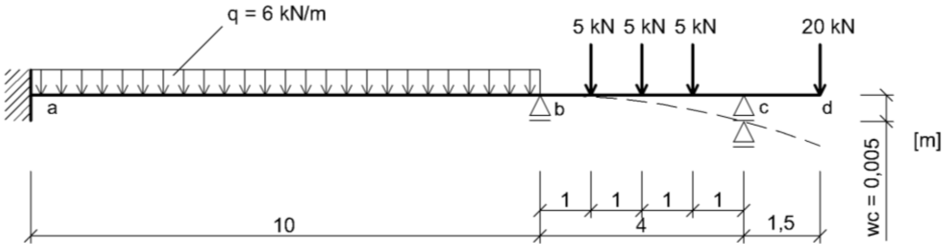
# 12. Příklad č. 12 – Spojitý nosník

*Zadání*

Vykreslete průběhy vnitřních sil na spojitém nosníku podle obrázku. Použijte metodu třímomentových rovnic. Průřezové charakteristiky jsou konstantní na celé konstrukci. Uvažujte pokles podpory *c* o 5mm. Pro kontrolu vyřešte konstrukci běžnou silovou metodou. Modul pružnosti E = 210GPa, moment setrvačnosti průřezu $I = 21{,}4 \cdot 10^{-6} m^4$.




Obr. 12.1: Model konstrukce a zatížení

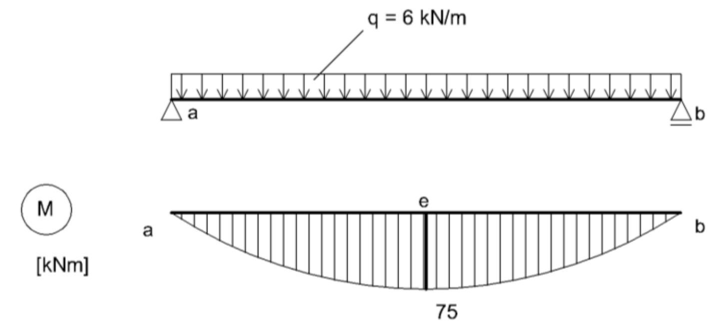
*Řešení*

**a) Základní soustava vznikne odebráním vnitřních vazeb**

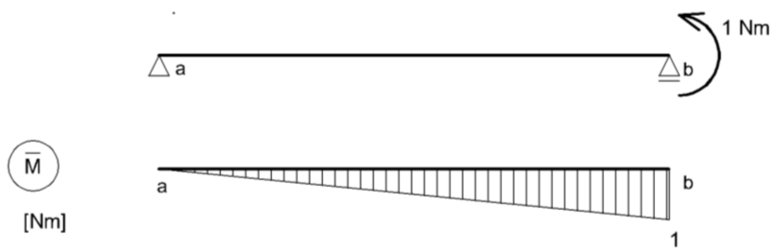
K výpočtu se využije třímomentová rovnice, jejíž řešením jsou neznáme nadpodporové momenty.

$$M_a \frac{L_{ab}}{6EI} + M_b \left( \frac{L_{ab}}{3EI} + \frac{L_{bc}}{3EI} \right) + M_c \frac{L_{bc}}{6EI} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0$$

Výpočet pootočení konců prutů od původního zatížení - metoda jednotkových sil

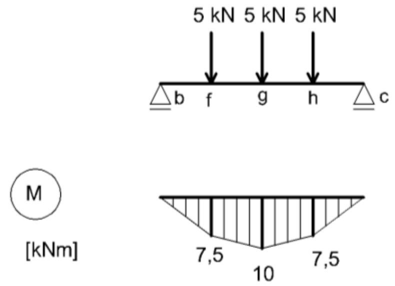



Obr. 12.2: Původní zatížení prvního pole – ohybové momenty

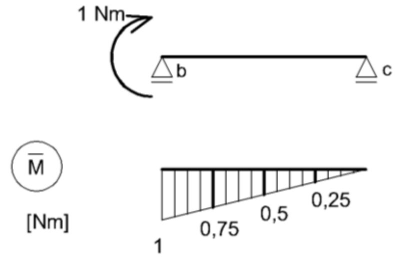



Obr. 12.3: Jednotkové zatížení prvního pole – ohybové momenty

$$\varphi_{ba} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3} M_e \overline{M}_b L_{ab}\right] = \frac{1}{EI}\frac{1}{3} 75\cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10 = \frac{250\cdot 10^3}{EI}$$




Obr. 12.2: Původní zatížení druhého pole – ohybové momenty




Obr. 12.3: Jednotkové zatížení druhého pole – ohybové momenty

$$\varphi_{bc} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}\left(M_f(2\overline{M}_f + \overline{M}_b)\right)L_{bf} + \frac{1}{6}\left(M_f(2\overline{M}_f + \overline{M}_g)\right)L_{fg} + \frac{1}{6}\left(M_g(2\overline{M}_g + \overline{M}_f)\right)L_{fg}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\left(M_g(2\overline{M}_g + \overline{M}_h)\right)L_{gh} + \frac{1}{6}\left(M_h(2\overline{M}_h + \overline{M}_g)\right)L_{gh} + \frac{1}{3}\left(M_h\overline{M}_h)\right)L_{gh}\right]$$

$$\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}\left(7{,}5\cdot(2\cdot 0{,}75+1)\right)\cdot 1 + \frac{1}{6}\left(7{,}5\cdot(2\cdot 0{,}75+0{,}5)\right)\cdot 1 + \frac{1}{6}\left(10\cdot(2\cdot 0{,}5+0{,}75)\right)\cdot 1 + \right.$$

$$\left.\frac{1}{6}\left(10\cdot(2\cdot 0{,}5+0{,}25)\right)\cdot 1 + \frac{1}{6}\left(7{,}5\cdot(2\cdot 0{,}25+0{,}5)\right)\cdot 1 + \frac{1}{3}\left(7{,}5\cdot 0{,}25)\right)\cdot 1\right]\cdot 10^3$$

$$= \frac{12{,}5\cdot 10^3}{EI}$$

## Třímomentové rovnice

$$M_c = -30000 Nm$$

$$M_a \frac{L_{ab}}{3EI} + M_b \frac{L_{ab}}{6EI} + \varphi_{ab} = 0$$

$$M_a \frac{L_{ab}}{6EI} + M_b\left(\frac{L_{ab}}{3EI} + \frac{L_{bc}}{3EI}\right) + M_c \frac{L_{bc}}{6EI} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0$$

$$M_a \frac{10}{3EI} + M_b \frac{10}{6EI} + \frac{25000}{EI} = 0$$

$$M_a \frac{10}{6EI} + M_b\left(\frac{10}{3EI} + \frac{4}{3EI}\right) + (-30000)\frac{4}{6EI} + \frac{25000}{EI} + \frac{12500}{EI} = 0$$

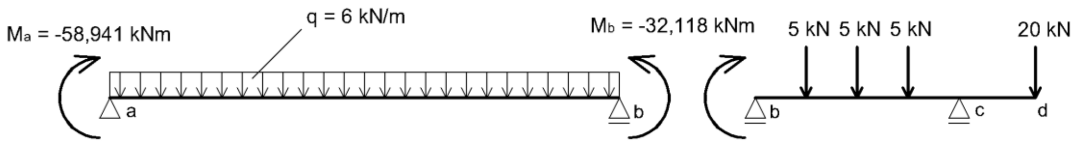
$$10M_a + 5M_b = -75000$$

$$10M_a + 28M_b = -1488705$$

Řešení

$$M_a = -58941Nm$$

$$M_b = -32118Nm$$




Obr. 12.4: Nadpodporové momenty

Reakce – pole *a-b*

$$\sum M_{a,i} = 0$$

$$-M_a + M_b - 5Q + 10R_{ba} = 0 \qquad 58{,}941 - 32{,}118 - 5\cdot 6\cdot 10 + 10R_{ba} = 0 \quad R_{ba} = 27{,}318kN$$

$$\sum M_{b,i} = 0$$

$$-M_a + M_b + 5Q - 10R_a = 0 \qquad 58{,}941 - 32{,}118 + 5\cdot 6\cdot 10 - 10R_a = 0 \quad R_a = 32{,}682kN$$

Reakce – pole *b-c*

$$\sum M_{b,i} = 0$$

$$-M_b + M_a - (1+2+3)F + 4R_{bc} = 0 \quad 32{,}118 - 30 - 6\cdot 5 + 4R_{ba} = 0 \qquad R_{cb} = 6{,}971kN$$

$$\sum M_{c,i} = 0$$

$$-M_b + M_c + (3+2+1) - 4R_{bc} = 0 \qquad 32{,}118 - 30 + 6\cdot 5 - 4R_{bc} = 0 \qquad R_{bc} = 8{,}029kN$$

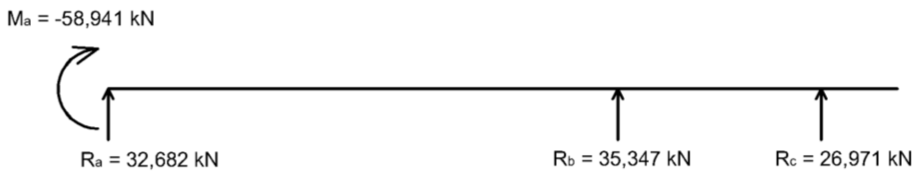
Reakce – pole *c-d*

$$\sum F_{z,i} = 0 \qquad R_{cd} - 20 = 0 \qquad R_{cd} = 20kN$$

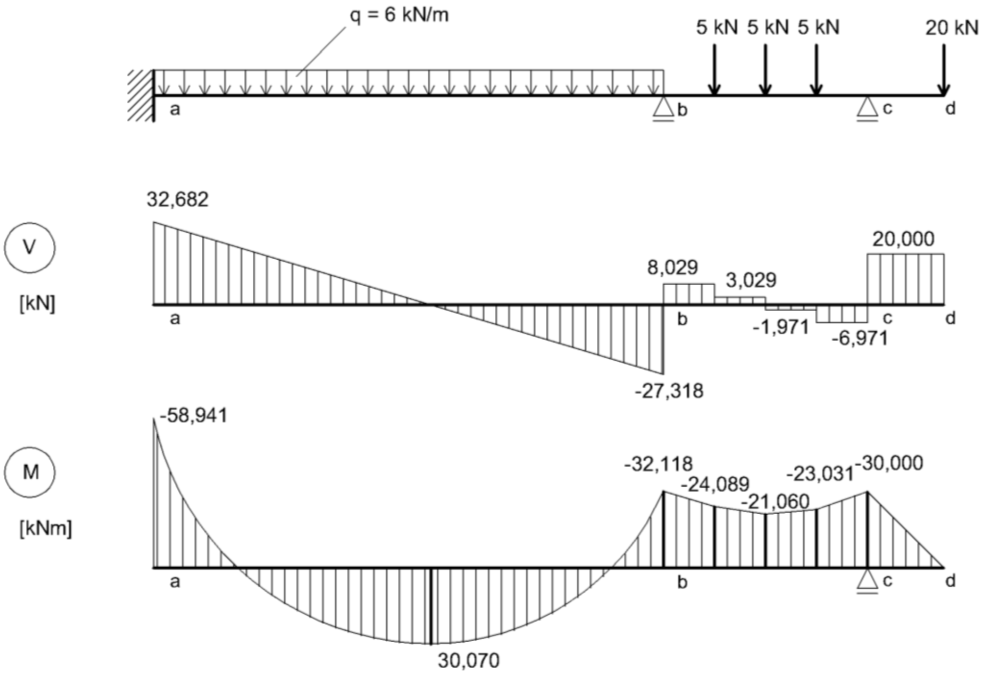
Celkové reakce

$$R_b = R_{ba} + R_{bc} = 27{,}318 + 8{,}029 = 35{,}347kN$$

$$R_c = R_{cb} + R_{cd} = 6{,}971 + 20 = 26{,}791kN$$

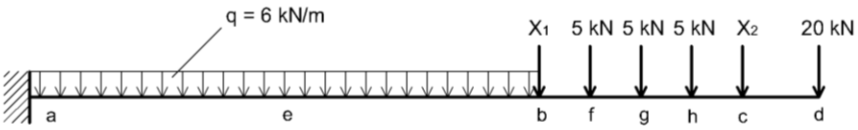



Obr. 12.5: Reakce

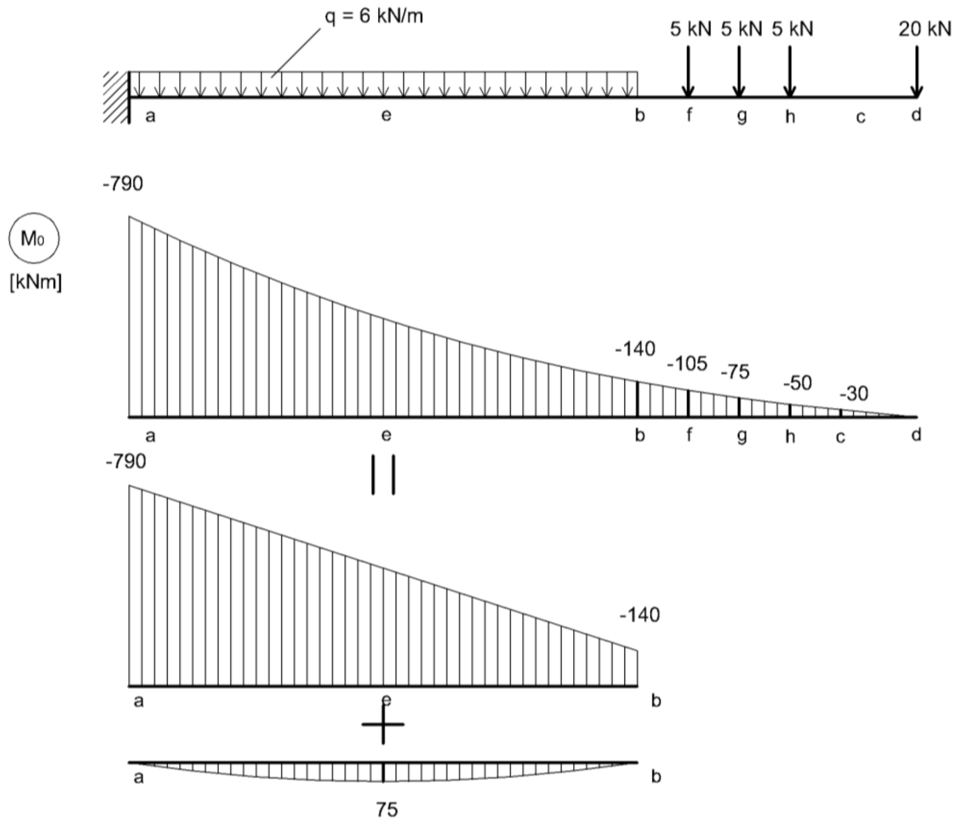



Obr. 12.6: Vnitřní síly

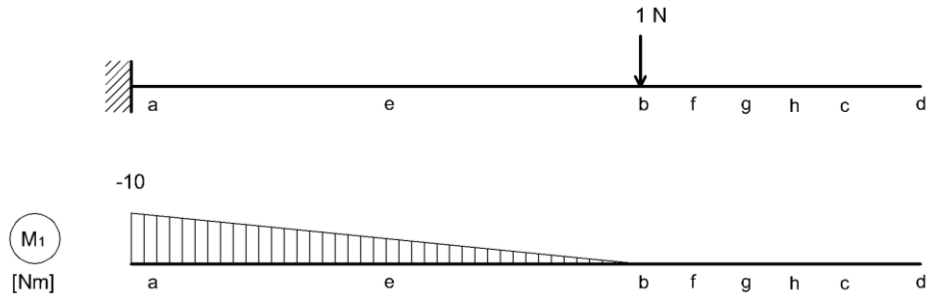
## b) Základní soustava vznikne odebráním vnějších vazeb



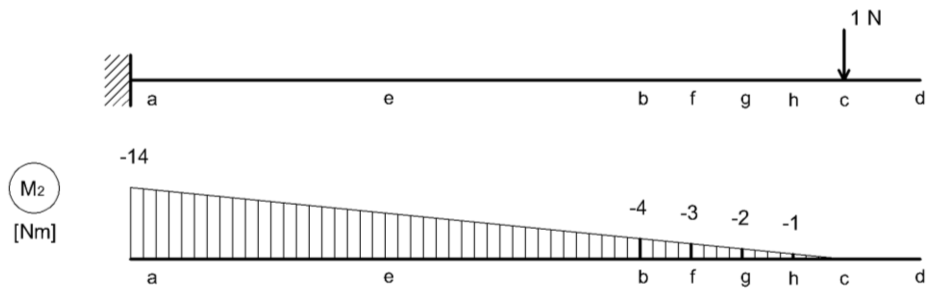

Obr. 12.7: Základní staticky určitá soustava




Obr. 12.8: Původní zatížení základní soustavy – ohybové momenty




Obr. 12.9: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru $X_1$ - ohybové momenty




Obr. 12.10: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru $X_2$ - ohybové momenty

**Výpočet přemístění**

$$\delta_{1,0}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}M_{a,1}\left(2M_{a,0}+M_{b,0}\right)L_{ab}+\frac{1}{3}M_{a,1}M''_{e,0}L_{ab}\right\}=$$

$$\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}\cdot(-10)\cdot\left(2\cdot(-790)+(-140)\right)\cdot 10+\frac{1}{3}\cdot(-10)\cdot(-75)\cdot 10\right\}10^3=\frac{26{,}1666\cdot 10^3}{EI}$$

$$\delta_{2,0}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}M_{a,2}\left[2M_{a,0}+M_{b,0}\right]L_{ab}+\frac{1}{6}M_{b,2}\left[M_{a,0}+2M_{b,0}\right]L_{ab}+\frac{1}{3}\left[M_{a,2}+M_{b,2}\right]M''_{a-b,0}L_{ab}\right\}$$

$$+\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}M_{b,2}\left[2M_{b,0}+M_{f,0}\right]L_{bf}+\frac{1}{6}M_{f,2}\left[M_{b,0}+2M_{f,0}\right]L_{bf}\right\}$$

$$+\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}M_{f,2}\left[2M_{f,0}+M_{ge,0}\right]L_{fg}+\frac{1}{6}M_{g,2}\left[M_{f,0}+2M_{g,0}\right]L_{fg}\right\}$$

$$+\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}M_{g,2}\left[2M_{g,0}+M_{h,0}\right]L_{gh}+\frac{1}{6}M_{h,2}\left[M_{g,0}+2M_{g,0}\right]L_{gh}\right\}$$

$$+\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}M_{h,2}\left[2M_{h,0}+M_{c,0}\right]L_{hc}\right\}$$

$$\delta_{2,0}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}\cdot(-14)\cdot\left[2\cdot(-790)+(-140)\right]\cdot 10+\frac{1}{6}\cdot(-4)\cdot\left[(-790)+2(-140)\right]\cdot 10\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\cdot\left[(-14)+(-4)\right]\cdot(-75)\cdot 10\right\}10^3$$

$$+\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}\cdot(-4)\cdot\left[2\cdot(-140)+(-105)\right]\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot(-3)\cdot\left[(-140)+2\cdot(-105)\right]\cdot 1\right\}10^3$$

$$+\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}\cdot(-3)\cdot\left[2\cdot(-105)+(-75)\right]\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot(-2)\cdot\left[(-105)+2\cdot(-75)\right]\cdot 1\right\}10^3$$

$$+\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}\cdot(-2)\cdot\left[2\cdot(-75)+(-50)\right]\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot(-1)\cdot\left[(-75)+2\cdot(-50)\right]\cdot 1\right\}10^3$$

$$+\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}\cdot(-1)\cdot\left[2\cdot(-50)+(-30)\right]\cdot 1\right\}10^3=\frac{43{,}54333\cdot 10^3}{EI}$$

$$\delta_{1,1}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}M_{a,1}M_{a,1}L_{ab}\right\}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}\cdot(-10)\cdot(-10)\cdot 10\right\}10^3=\frac{333{,}333}{EI}$$

$$\delta_{1,2}=\delta_{2,1}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{3}M_{a,1}\left[2M_{a,2}+M_{b,2}\right]L_{ab}\right\}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{3}\cdot(-10)\cdot\left[2\cdot(-14)+(-14)\right]\cdot 10\right\}10^3=\frac{533{,}333}{EI}$$

$$\delta_{2,2}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{3}M_{a,2}M_{a,2}L_{ac}\right\}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{3}\cdot(-14)(-14)\cdot 14\right\}10^3=\frac{914{,}666}{EI}$$

**Kanonické rovnice – deformační podmínky**

$$\delta_{10}+\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0$$

$$\delta_{20}+\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0$$

$$333{,}333X_1+533{,}333X_2=-26{,}1666\cdot 10^3$$

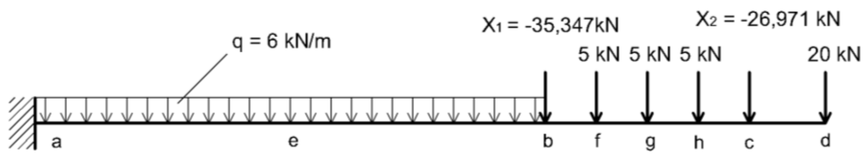
$$533{,}333X_1+914{,}666X_2=-43{,}5433\cdot 10^3$$

Řešení

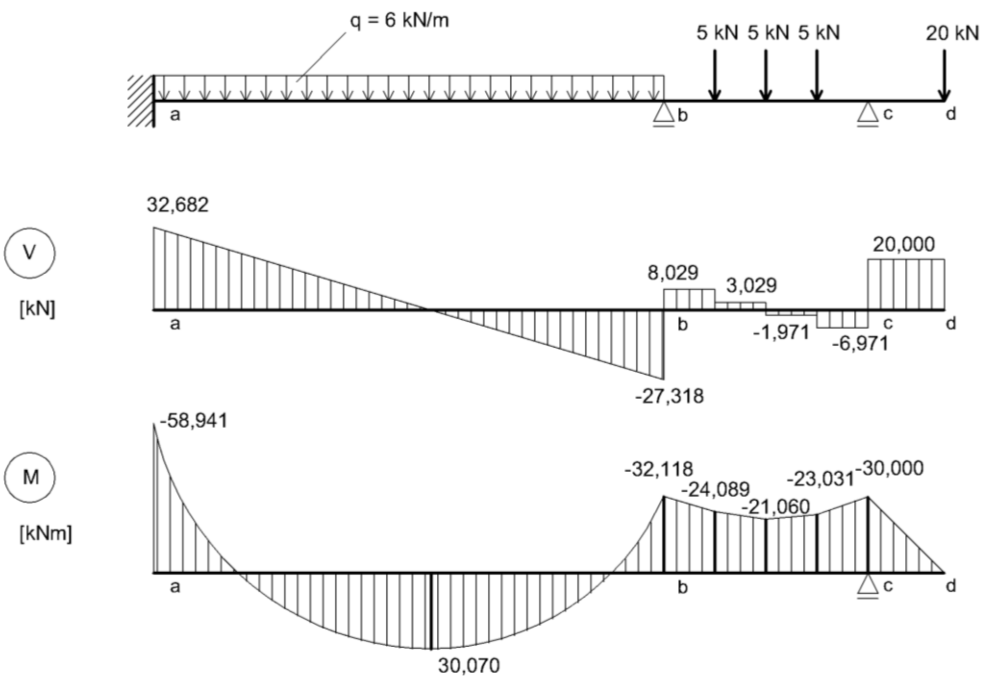
$X_1 = -35{,}347 \cdot 10^3 = -35{,}347 kN$

$X_2 = -26{,}971 \cdot 10^3 = -26{,}971 kN$

## Vnitřní síly




Obr. 12.11: Výsledné zatížení základní soustavy




Obr. 12.12: Vnitřní síly