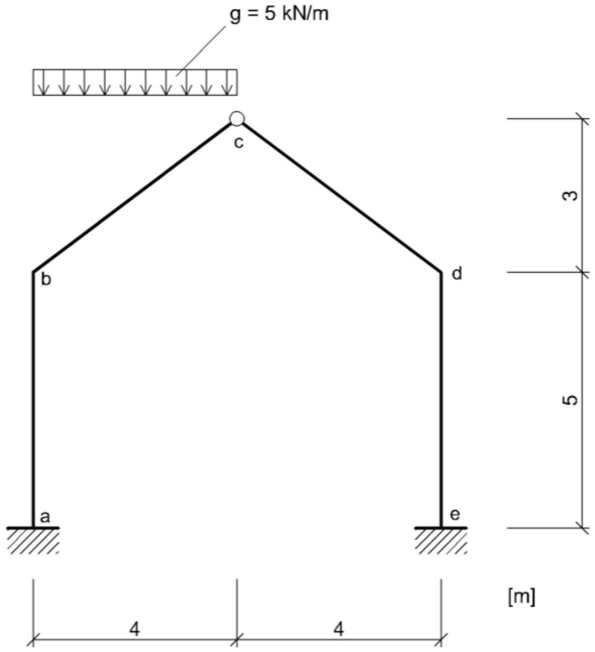
11. Příklad č. 11 – Staticky neurčitý rám

Zadání

Vykreslete průběhy vnitřních sil na staticky neurčité konstrukci podle obrázku. Použijte silovou metodu. Zanedbejte práci normálových a posouvajících sil. Průřezové charakteristiky jsou konstantní na celé konstrukci.



Obr. 11.1: Model konstrukce a zatížení

Řešení

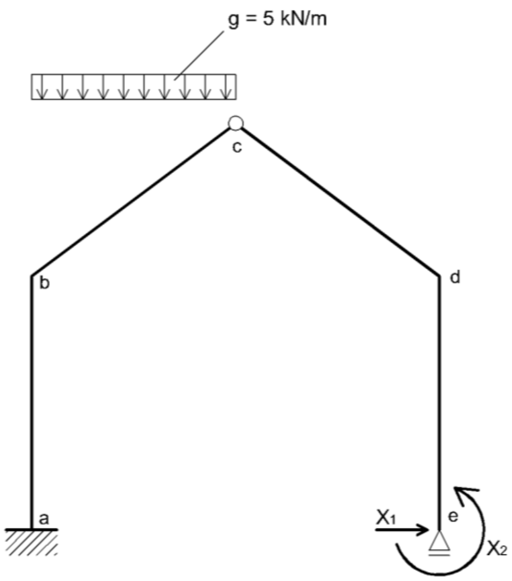
Konstrukce bude řešena silovou metodou. Konstrukce je dvakrát staticky neurčitá.

a) základní soustava vznikne odebráním vnějších vazeb

Základní soustava se vytvoří odebráním vazby proti vodorovnému posunu v bodě *e* a vazby proti pootočení v bodě *e*. Neznámá síla X_1 bude představovat vodorovnou reakci v bodě *e* a neznámá síla X_2 bude představovat momentovou reakci v bodě *e*. Deformační podmínky budou předepisovat nulový vodorovný posun v bodě e a nulové pootočení v bodě *e*.

$$u_e = \delta_1 = 0$$

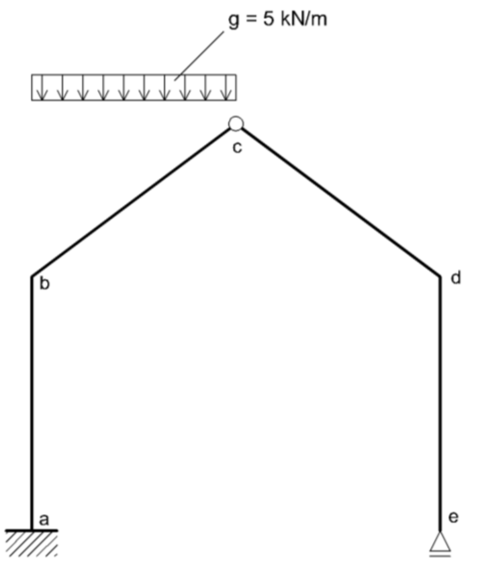
$$\varphi_e = \delta_2 = 0$$



Obr. 11.2: Základní staticky určitá soustava

Základní soustava se zatíží třemi zatěžovacími stavy.

Zatěžovací stav 0 – Původní zatížení



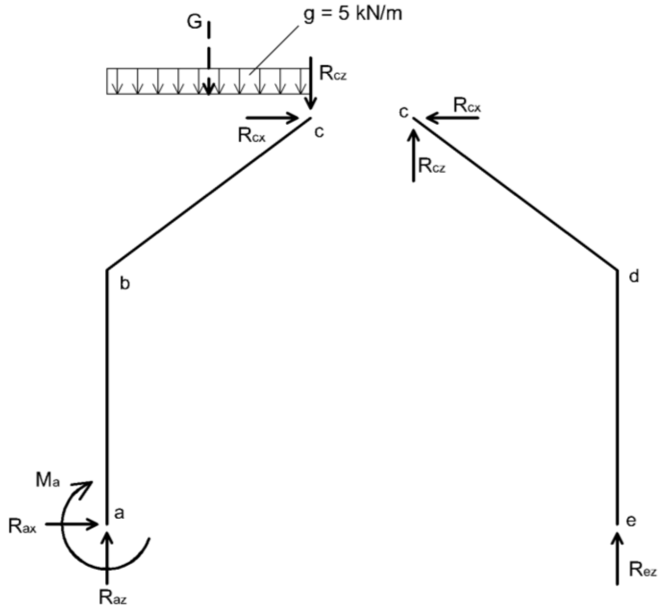
Obr. 11.3: Původní zatížení základní soustavy

Reakce vazeb

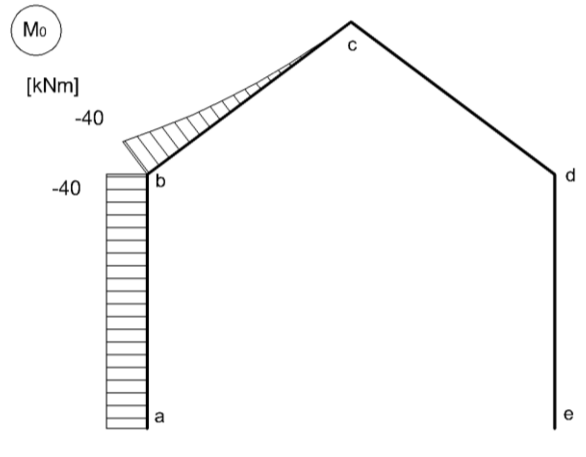
$G = g \cdot 4 = 20kN$

$\sum F_{x,i}^{P} = 0$	$R_{cx} = 0$	$R_{cx} = 0kN$
$\sum M_{c,i}^{P} = 0$	$R_{ez}.4 = 0$	$R_{ez} = 0kN$
$\sum F_{z,i}^{P} = 0$	$R_{ez} + R_{cz} = 0$	$R_{cz} = 0kN$
$\sum F_{x,i}^{L} = 0$	$R_{cx} + R_{ax} = 0$	$R_{ax} = 0kN$
$\sum F_{z,i}^{L} = 0$	$R_{az} - R_{cz} - G = 0$	$R_{az} = 20kN$

$$\sum M_{a,i}^{P} = 0 \qquad M_a + R_{cz} \cdot 4 + R_{cx} \cdot 8 + G \cdot 2 = 0 \qquad M_a = -40kNm$$

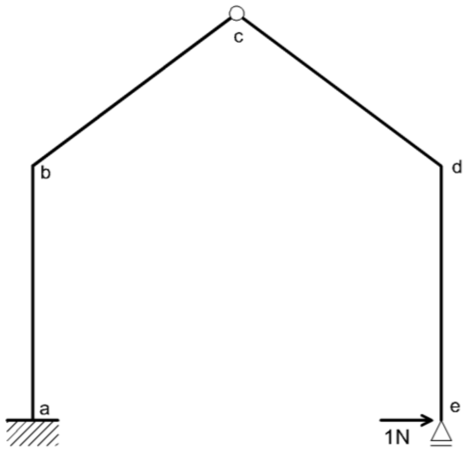


Obr. 11.4: Původní zatížení základní soustavy – reakce vnitřních a vnějších vazeb

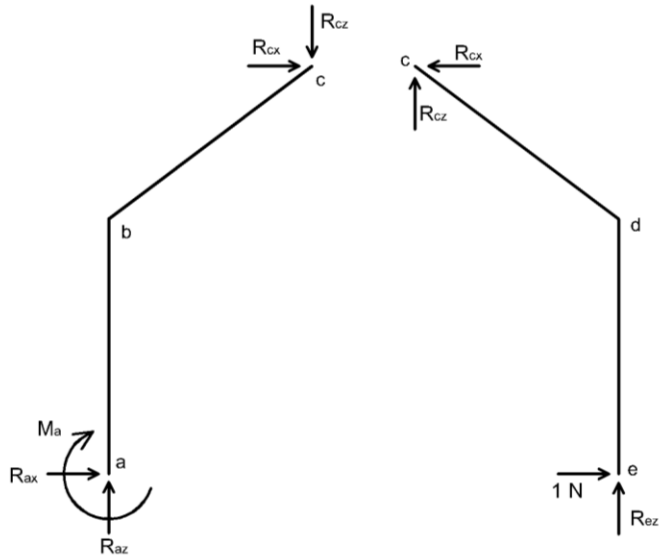


Obr. 11.4: Původní zatížení základní soustavy – ohybové momenty

Zatěžovací stav 1 – Jednotková síla ve směru neznámé síly X_1



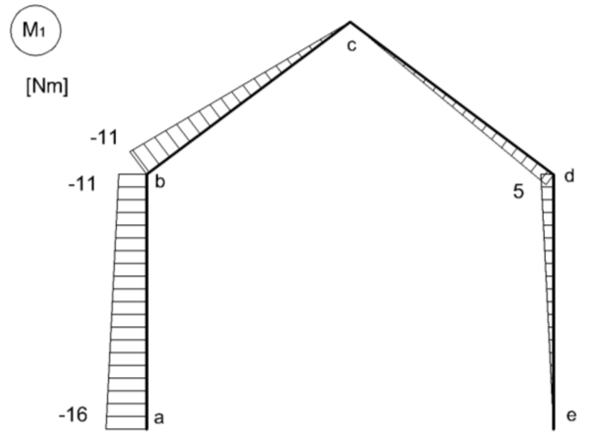
Obr. 11.5: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_1



Obr. 11.6: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_1 – reakce vnějších a vnitřních vazeb

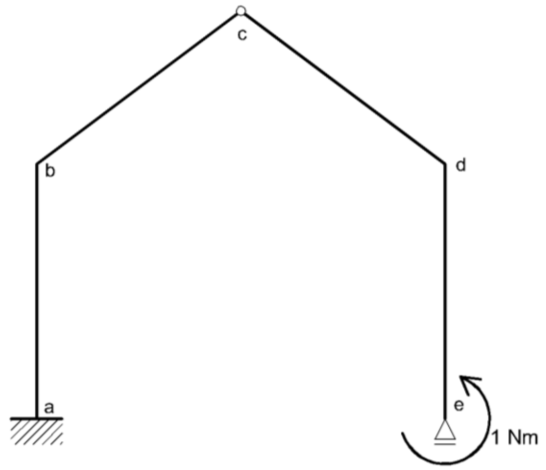
Reakce vazeb

$\sum F_{x,i}^{P} = 0$	$R_{cx} + 1 = 0$	$R_{cx} = -1kN$
$\sum M_{c,i}^{P} = 0$	$1.8 - R_{ez}.4 = 0$	$R_{ez} = 2kN$
$\sum F_{z,i}^{P} = 0$	$R_{ez} + R_{cz} = 0$	$R_{cz} = -2kN$
$\sum F_{x,i}^{L} = 0$	$R_{cx} + R_{ax} = 0$	$R_{ax} = 1kN$
$\sum F_{z,i}^{L} = 0$	$R_{az} - R_{cz} = 0$	$R_{az} = 2kN$
$\sum M_{a,i}^{P} = 0$	$M_a + R_{cz} \cdot 4 + R_{cx} \cdot 8 = 0$	$M_a = -16kNm$

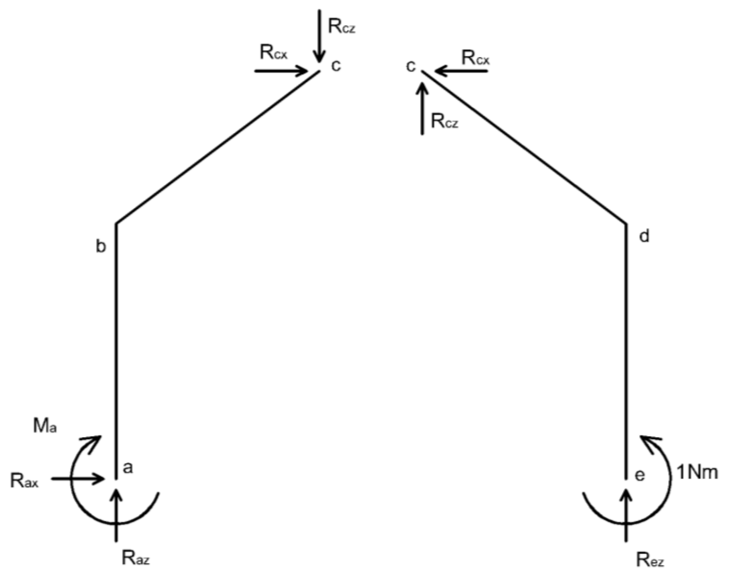


Obr. 11.7: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_1 - ohybové momenty

Zatěžovací stav 2 – Jednotková síla ve směru neznámé síly X_2



Obr. 11.8: Zatížení základní soustavy jednotkovým momentem ve směru X_2



Obr. 11.9: Zatížení základní soustavy jednotkovým momentem ve směru X_2 – reakce vnějších a vnitřních vazeb

Reakce vazeb

$\sum F_{x,i}^{P} = 0$ $\quad R_{cx} = 0$ $\quad R_{cx} = 0kN$

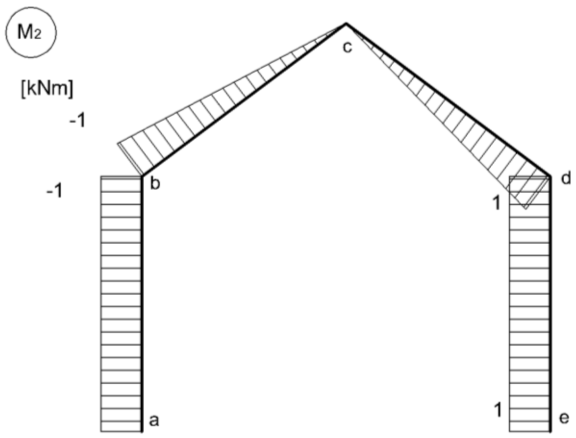
$\sum M_{c,i}^{P} = 0$ $\quad 1 + R_{ez}.4 = 0$ $\quad R_{ez} = -0{,}25kN$

$\sum F_{z,i}^{P} = 0$ $\quad R_{ez} + R_{cz} = 0$ $\quad R_{cz} = 0{,}25kN$

$\sum F_{x,i}^{L} = 0$ $\quad R_{cx} + R_{ax} = 0$ $\quad R_{ax} = 0kN$

$\sum F_{z,i}^{L} = 0$ $\quad R_{az} - R_{cz} = 0$ $\quad R_{az} = 0{,}25kN$

$\sum M_{a,i}^{P} = 0$ $\quad M_a + R_{cz} \cdot 4 + R_{cx} \cdot 8 = 0$ $\quad M_a = -1kNm$



Obr. 11.10: Zatížení základní soustavy jednotkovým momentem ve směru X_2 – ohybové momenty

Výpočet přemístění

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{2}\left(M_{a,1} + M_{ba,1}\right).M_{a,0}.L_{ab} + \frac{1}{4}.M_{bc,0}.M_{bc,1}.L_{bc}\right\}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{2}\cdot(11+16)\cdot 40\cdot 10^3 \cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 40\cdot 10^3 \cdot 11\cdot 5\right\} = \frac{1}{EI}3250\cdot 10^3$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\left\{M_{a,1}.M_{a,0}.L_{ab} + \frac{1}{4}.M_{bc,0}.M_{bc,1}.L_{bc}\right\}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\left\{1\cdot 40\cdot 10^3 \cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 40\cdot 10^3 \cdot 5\right\} = \frac{1}{EI}250\cdot 10^3$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}M_{a,1}\left(2.M_{a,1} + M_{ba,1}\right).L_{ab} + \frac{1}{6}M_{ba,1}\left(2.M_{ba,1} + M_{a,1}\right).L_{ab} + \frac{1}{3}.M_{bc,1}.M_{bc,1}.L_{bc} + \frac{1}{3}.M_{dc,1}.M_{dc,1}.L_{cd} + \frac{1}{3}.M_{de,1}.M_{de,1}.L_{de}\right\}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}\cdot 16\cdot(2\cdot 16+11)\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 11\cdot(2\cdot 11+16)\cdot 5 + \frac{1}{3}\cdot 11\cdot 11\cdot 5 + \frac{1}{3}\cdot 5\cdot 5\cdot 5 + \frac{1}{3}\cdot 5\cdot 5\cdot 5\right\} = \frac{1}{EI}1206{,}667$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{2}\left(M_{a,1} + M_{ba,1}\right)M_{a,2}.L_{ab} + \frac{1}{3}.M_{bc,1}.M_{bc,2}.L_{bc} + \frac{1}{3}.M_{dc,1}.M_{dc,2}.L_{cd} + \frac{1}{2}.M_{de,1}.M_{de,2}.L_{de}\right\}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{2}\cdot(16+11)\cdot 1\cdot 5 + \frac{1}{3}\cdot 11\cdot 1.5 + \frac{1}{3}\cdot 5\cdot 1\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 5\cdot 5\right\} = \frac{1}{EI}106{,}667$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\left\{M_{a,2}.M_{a,2}.L_{ab} + \frac{1}{3}.M_{bc,2}.M_{bc,2}.L_{bc} + \frac{1}{3}.M_{dc,2}.M_{dc,2}.L_{cd} + M_{de,2}.M_{de,2}.L_{de}\right\}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\left\{1\cdot 1\cdot 5 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 5 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 5 + 1\cdot 1\cdot 5\right\} = \frac{1}{EI}13{,}333$$

Kanonické rovnice – deformační podmínky

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0$$

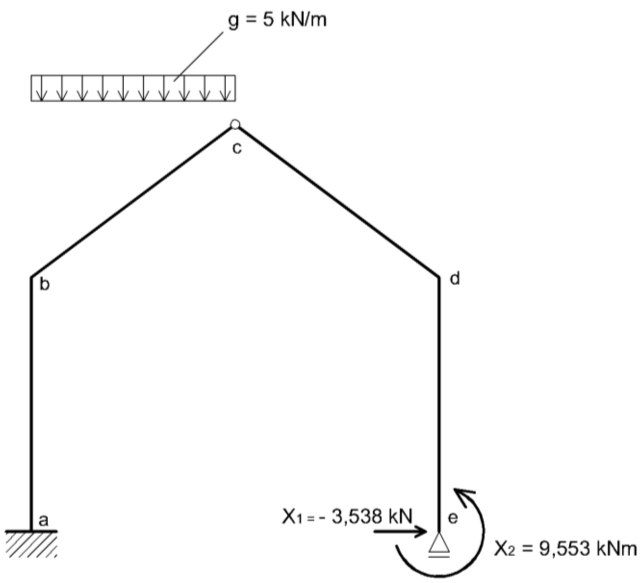
$$\delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0$$

$$1206{,}667X_1 + 106{,}667X_2 = -3250\cdot 10^3$$
$$106{,}667X_1 + 13{,}333X_2 = -250\cdot 10^3$$

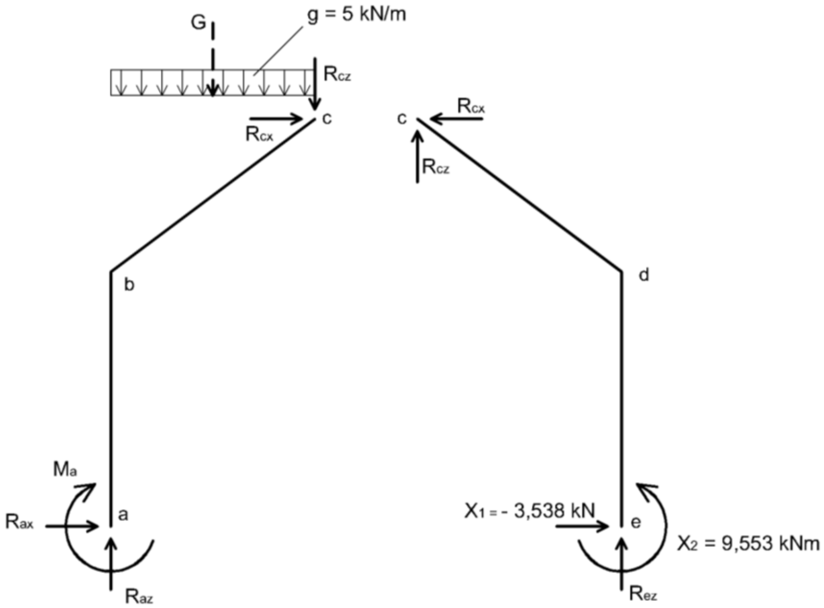
Řešení

$$X_1 = -3{,}538\cdot 10^3\,N$$
$$X_2 = 9{,}553\cdot 10^3\,N$$

Výpočet vnitřních sil



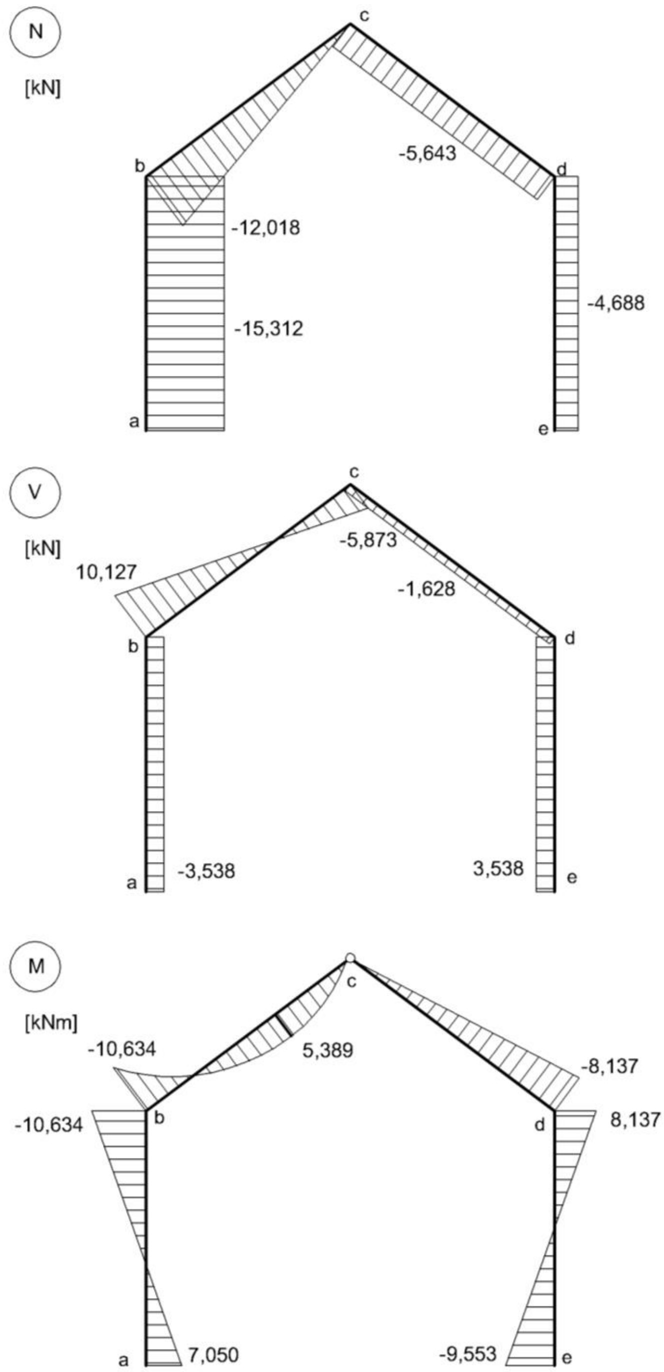
Obr. 11.11: Výsledné zatížení základní staticky určité soustavy



Obr. 11.12: Výsledné zatížení základní staticky určité soustavy - reakce

Výpočet reakcí vazeb

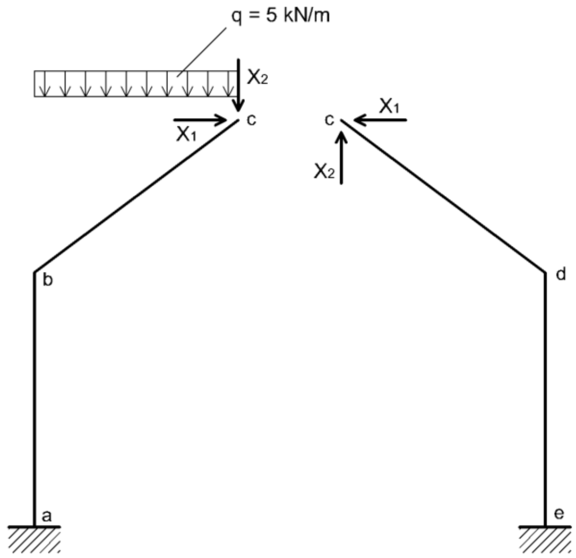
$\sum F_{x,i}^{P} = 0$	$R_{cx} - X_1 = 0$	$R_{cx} = -3{,}538 kN$
$\sum M_{c,i}^{P} = 0$	$X_1 \cdot 8 + X_2 + R_{ez}.4 = 0$	$R_{ez} = 4{,}688 kN$
$\sum F_{z,i}^{P} = 0$	$R_{ez} + R_{cz} = 0$	$R_{cz} = -4{,}688 kN$
$\sum F_{x,i}^{L} = 0$	$R_{cx} + R_{ax} = 0$	$R_{ax} = 3{,}538 kN$
$\sum F_{z,i}^{L} = 0$	$R_{az} - R_{cz} - G = 0$	$R_{az} = 15{,}312 kN$
$\sum M_{a,i}^{P} = 0$	$M_a + R_{cz} \cdot 4 + R_{cx} \cdot 8 + G \cdot 2 = 0$	$M_a = 7{,}056 kNm$



Obr. 11.12: Výsledné průběhy vnitřních sil

b) základní soustava vznikne odebráním vnitřních vazeb

Základní soustava: konstrukce je rozdělena v kloubu na dvě části.



Obr. 11.13 Základní staticky určitá soustava

Deformační podmínky: vzájemné posuny obou konců jsou nulové

Základní staticky určitá soustava se vytvoří odebráním vazeb zajišťujících nulový vzájemný posun konců prutů v kloubu c. Vazby se nahradí reakcí vnitřních vazeb silami X_1 a X_2, které působí opačně na oba konce prutů, podobně jako vnitřní síly.

Deformační podmínky představují rovnost přemístění (vodorovný posun u, svislý posun w) v levé a pravé části v místě kloubu.

$$u_c^L = u_c^P$$

$$w_c^L = w_c^P$$

Vzhledem k opačnému působení reakcí na oba konce prutů svislé posuny zleva a zprava bodu *b* můžeme vyjádřit

$\delta_1^L = u^L$ ... směřuje doprava

$\delta_1^P = -u^P$ ... směřuje doleva

$\delta_2^L = w^L$ ... směřuje dolů

$\delta_2^P = -w^P$ ... směřuje nahoru

po dosazení dostaneme

$$\delta_1^L + \delta_1^P = \delta_1 = 0$$

$$\delta_2^L + \delta_2^P = \delta_2 = 0$$

Rovnice vyjadřují, že vzájemný posun obou konců prutů je nulový a není nutné rozdělovat konstrukci na levou a pravou část při integraci přemístění. Pro názornost toto rozdělení bude provedeno.

Posuny na levé části jsou dány vlivem zatížení a reakcí X_1 a X_2.

$$\delta_1^L = \delta_{1,0}^L + \delta_{1,1}^L X_1 + \delta_{1,2}^L X_2$$

$$\delta_2^{\ L} = \delta_{2,0}^L + \delta_{2,1}^L X_1 + \delta_{2,2}^L X_2$$

Obdobně posuny na pravé části

$$\delta_1^{\ P} = \delta_{1,0}^P + \delta_{1,1}^P X_1 + \delta_{1,2}^P X_2$$

$$\delta_2^{\ P} = \delta_{2,0}^P + \delta_{2,1}^P X_1 + \delta_{2,2}^P X_2$$

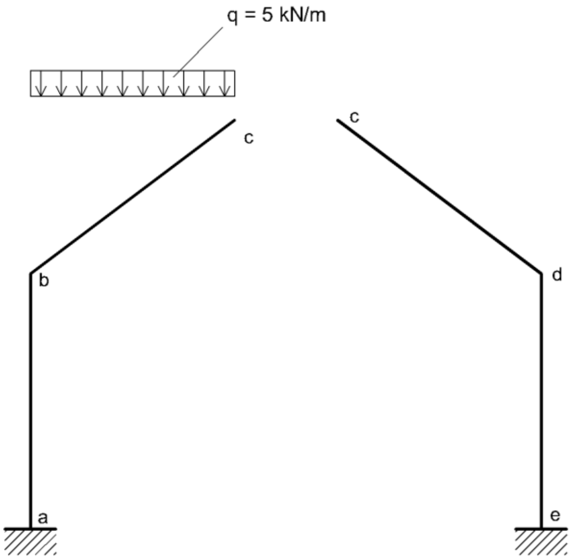
Po dosazení se získají kanonické rovnice pro určení neznámých sil X_1 a X_2.

$$\left(\delta_{10}^L + \delta_{10}^P\right) + \left(\delta_{11}^L + \delta_{11}^P\right) X_1 + \left(\delta_{12}^L + \delta_{12}^P\right) X_2 = 0$$

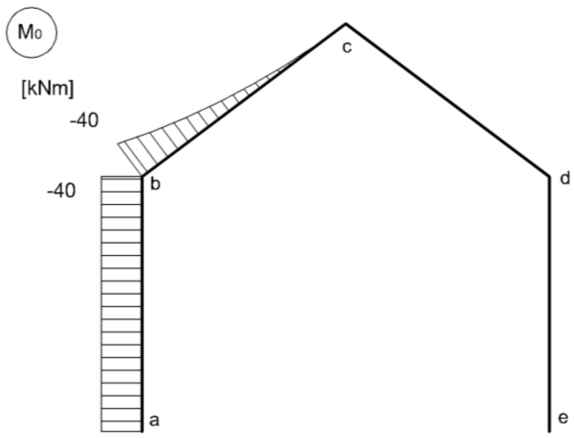
$$\left(\delta_{20}^L + \delta_{20}^P\right) + \left(\delta_{21}^L + \delta_{21}^P\right) X_1 + \left(\delta_{22}^L + \delta_{22}^P\right) X_2 = 0$$

Základní soustava se zatíží třemi zatěžovacími stavy.

Zatěžovací stav 0 – Původní zatížení

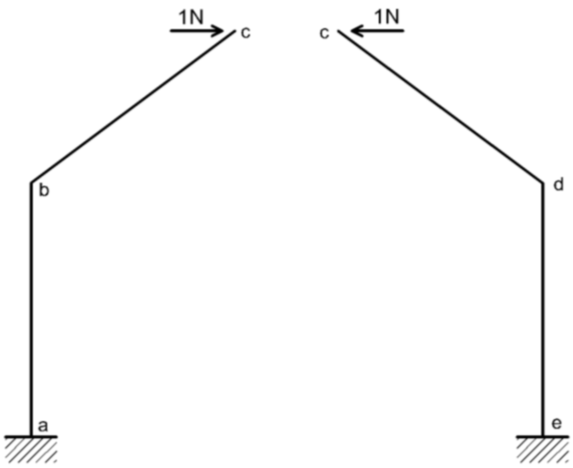


Obr. 11.14: Původní zatížení základní soustavy

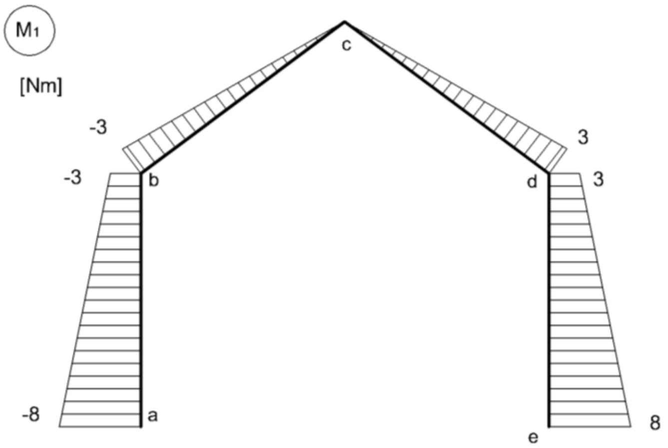


Obr. 11.15: Původní zatížení základní soustavy – ohybové momenty

Zatěžovací stav 1 – Jednotková síla ve směru neznámé síly X_1

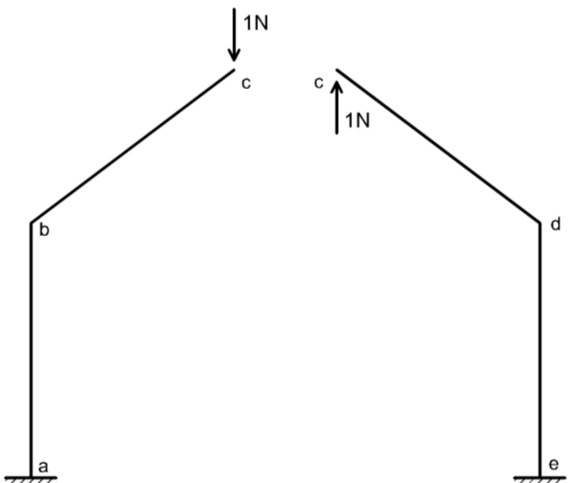


Obr. 11.16: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_1

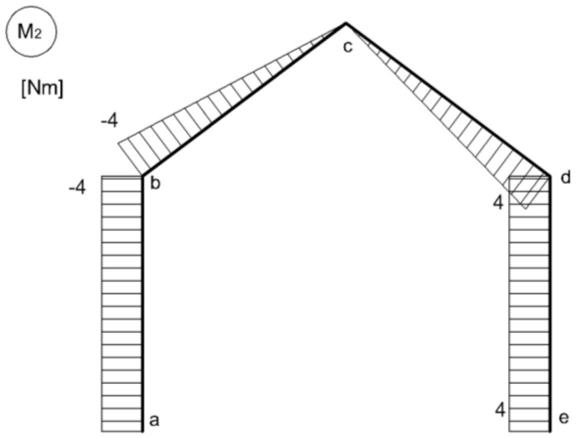


Obr. 11.17: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_1 - ohybové momenty

Zatěžovací stav 2 – Jednotková síla ve směru neznámé síly X_2



Obr. 11.18: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_2



Obr. 11.19: Zatížení základní soustavy jednotkovou silou ve směru X_2 - ohybové momenty

Výpočet přemístění

$$\delta_{10}^{L}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{2}M_{a,0}\left(M_{a,1}+M_{ba,1}\right).L_{ab}+\frac{1}{4}.M_{bc,0}.M_{bc,1}.L_{bc}\right\}$$

$$\delta_{10}^{L}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{2}\cdot(-40\cdot10^{3})\cdot(-3-8)\cdot5+\frac{1}{4}\cdot40\cdot10^{3}\cdot(-3)\cdot5\right\}=\frac{1250\cdot10^{3}}{EI}$$

$$\delta_{11}^{L}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}M_{ba,1}\left(2M_{ba,1}+M_{a,1}\right).L_{ab}+\frac{1}{6}M_{a,1}\left(2M_{a,1}+M_{ba,1}\right).L_{ab}+\frac{1}{3}.M_{bc,1}.M_{bc,1}.L_{bc}\right\}$$

$$\delta_{11}^{L}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}\cdot(-3)\cdot\left((2\cdot(-3)-8\right)\cdot5+\frac{1}{6}\cdot(-8)\cdot\left((2\cdot(-8)-3\right)\cdot5+\frac{1}{3}\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot5\right\}=\frac{176{,}667}{EI}$$

$$\delta_{12}^{L}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{3}M_{a,2}\left(M_{a,1}+M_{ba,1}\right).L_{ab}+\frac{1}{3}.M_{bc,2}.M_{bc,1}.L_{bc}\right\}$$

$$\delta_{12}^{L}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{3}\cdot(-4)\cdot\left((-8)-3\right)\cdot5+\frac{1}{3}\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot5\right\}=\frac{130}{EI}$$

$$\delta_{20}^{L}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{2}M_{a,2}.M_{a,0}.L_{ab}+\frac{1}{4}.M_{bc,2}.M_{bc,0}.L_{bc}\right\}$$

$$\delta_{20}^{L}=\frac{1}{EI}\left\{(-4)\cdot(-40\cdot10^{3})\cdot5+\frac{1}{4}\cdot(-4)\cdot(-40\cdot10^{3})\cdot5\right\}=\frac{1000\cdot10^{3}}{EI}$$

$$\delta_{22}^{L}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{2}M_{a,0}.M_{a,1}.L_{ab}+\frac{1}{4}.M_{bc,2}.M_{bc,0}.L_{bc}\right\}$$

$$\delta_{22}^{L}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{2}\cdot(-4)\cdot(-40\cdot10^{3})\cdot5+\frac{1}{4}\cdot(-3)\cdot(-40\cdot10^{3})\cdot5\right\}=\frac{106{,}667\cdot10^{3}}{EI}$$

$$\delta_{10}^{P}=0$$

$$\delta_{11}^{P}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{3}.M_{dc,1}.M_{dc,1}.L_{cd}+\frac{1}{6}M_{de,1}\left(2M_{de,1}+M_{e,1}\right).L_{de}+\frac{1}{6}M_{e,1}\left(2M_{e,1}+M_{de,1}\right).L_{de}\right\}$$

$$\delta_{11}^{P}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{3}\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot(-3)\cdot\left((2\cdot(-3)-8\right)\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot(-8)\cdot\left((2\cdot(-8)-3\right)\cdot 5\right\}=\frac{176{,}667}{EI}$$

$$\delta_{12}^{P}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{3}.M_{dc,2}.M_{dc,1}.L_{bc}+\frac{1}{3}M_{de,2}\left(M_{de,1}+M_{e,1}\right).L_{ab}\right\}$$

$$\delta_{12}^{P}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{3}\cdot 4\cdot(-3)\cdot 5+\frac{1}{3}\cdot 4\cdot\left((-3)-8\right)\cdot 5\right\}=\frac{-130}{EI}$$

$$\delta_{20}^{P}=0$$

$$\delta_{22}^{L}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{4}M_{dc,0}.M_{dc,1}.L_{bc}+\frac{1}{2}.M_{de,2}.M_{de,0}.L_{de}\right\}$$

$$\delta_{22}^{L}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{4}4\cdot(-40\cdot 10^{3})\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(-40\cdot 10^{3})\cdot 5\right\}=\frac{106{,}667\cdot 10^{3}}{EI}$$

Kanonické rovnice – deformační podmínky

$$\left(\delta_{10}^{L}+\delta_{10}^{P}\right)+\left(\delta_{11}^{L}+\delta_{11}^{P}\right)X_1+\left(\delta_{12}^{L}+\delta_{12}^{P}\right)X_2=0$$

$$\left(\delta_{20}^{L}+\delta_{20}^{P}\right)+\left(\delta_{21}^{L}+\delta_{21}^{P}\right)X_1+\left(\delta_{22}^{L}+\delta_{22}^{P}\right)X_2=0$$

$$\left(1250\cdot 10^{3}+0\right)+\left(176{,}667+176{,}667\right)X_1+\left(130+130\right)X_2=0$$

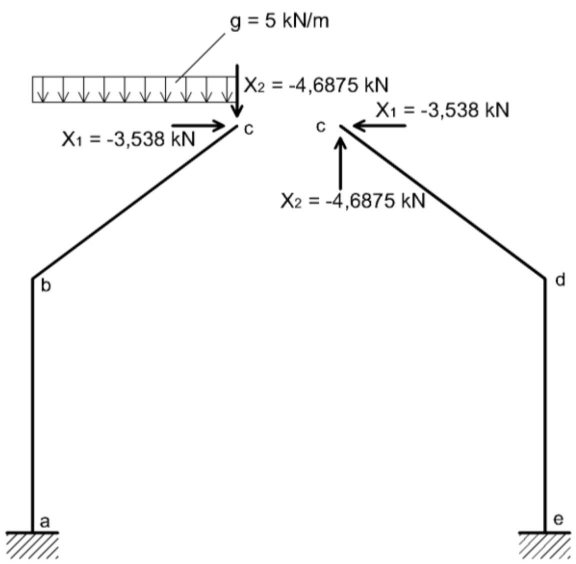
$$\left(1000\cdot 10^{3}+0\right)+\left(130+130\right)X_1+\left(106{,}667+106{,}667\right)X_2=0$$

Řešení

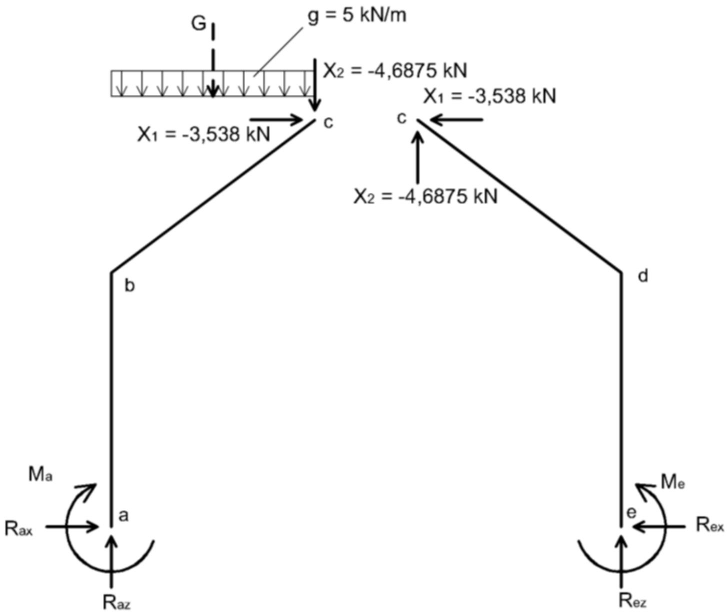
$X_1=-3{,}538.10^{3}\,N$

$X_2=-4{,}6875.10^{3}\,N$

Výpočet vnitřních sil



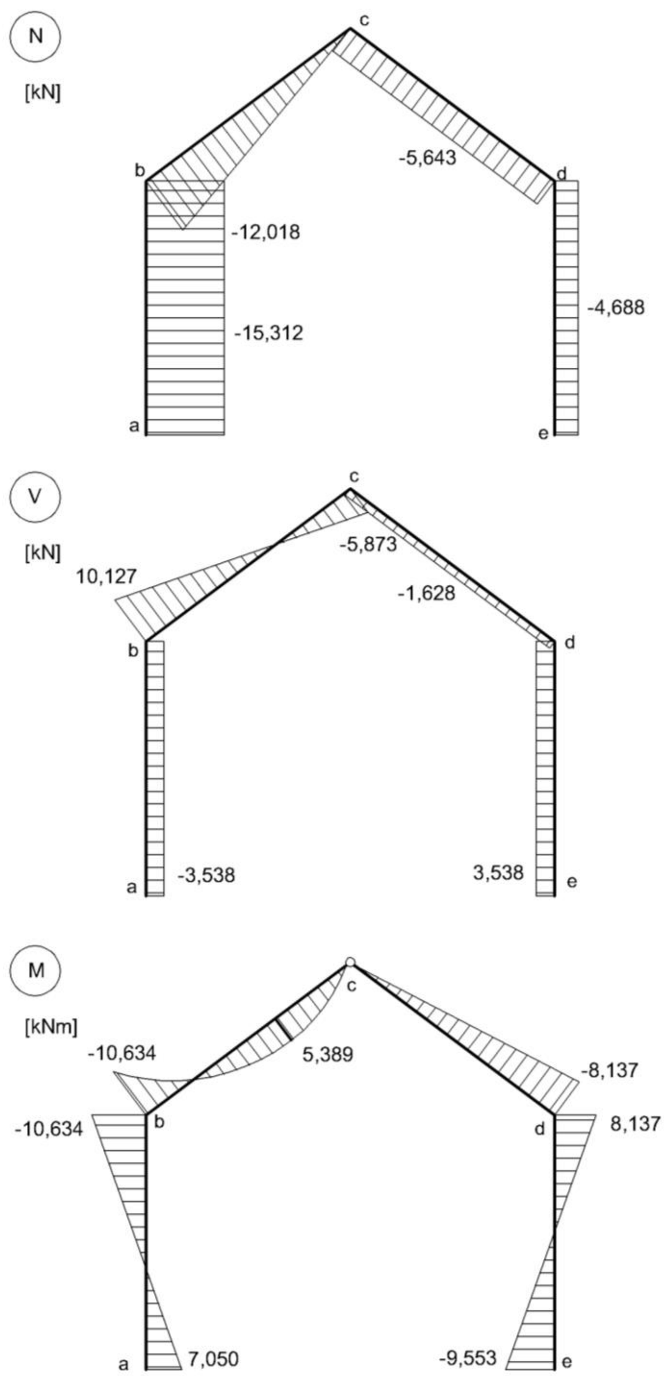
Obr. 11.20: Výsledné zatížení základní soustavy



Obr. 11.21: Výsledné zatížení základní soustavy – reakce

Výpočet reakcí vazeb

$\sum F_{x,i}^{P} = 0$	$R_{ex} + X_1 = 0$	$R_{ex} = 3{,}538 kN$
$\sum F_{z,i}^{P} = 0$	$R_{ez} + X_2 = 0$	$R_{ez} = 4{,}688 kN$
$\sum M_{e,i}^{P} = 0$	$X_1 \cdot 8 + M_e + X_2 .4 = 0$	$M_e = -9{,}553 kN$
$\sum F_{x,i}^{L} = 0$	$X_1 + R_{ax} = 0$	$R_{ax} = 3{,}538 kN$
$\sum F_{z,i}^{L} = 0$	$R_{az} - X_2 - G = 0$	$R_{az} = 15{,}312 kN$
$\sum M_{a,i}^{P} = 0$	$M_a + X_2 \cdot 4 + X_1 \cdot 8 + G \cdot 2 = 0$	$M_a = 7{,}056 kNm$



Obr. 11.22: Výsledné průběhy vnitřních sil