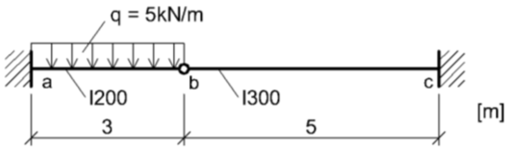
7. Příklad č. 7 – Staticky neurčitý nosník

Zadání

Vykreslete průběhy vnitřních sil na staticky neurčitém ocelovém nosníku podle obrázku. Pro řešení použijte silovou metodu. Modul pružnosti oceli E = 210GPa, momenty setrvačnosti jsou pro I200 – $I_{ab} = 21{,}4\cdot 10^{-6}\mathrm{m}^4$, pro I300 – $I_{bc} = 97{,}9\cdot 10^{-6}\mathrm{m}^4$. Zanedbejte práci posouvajících sil.



Obr. 7.1: Model konstrukce a zatížení

Řešení

Konstrukce je 2x staticky neurčitá. Vzhledem k tomu, že nosník je přímý a nezatížený ve své ose není třeba se zabývat osovými silami a je možno řešit 1x staticky neurčitou konstrukci.

Bude se postupovat silovou metodou, kdy se odebráním vazeb (vnějších nebo vnitřních) vytvoří staticky určitá základní soustava. Odebrané vazby se nahradí neznámými silami X_i, a podmínkami pro přemístění δ_i, které tyto vazby zajišťovaly. Tyto podmínky slouží k určení neznámých sil X_i.

Přemístění se budou určovat z Maxwell-Mohrova vzorce

$$\delta = \int_L \frac{N\overline{N}}{EA}ds + \int_L \frac{V\overline{V}}{GA_\kappa}ds + \int_L \frac{M\overline{M}}{EI}ds + \int_L \overline{N}\alpha_t \Delta t_0 ds + \int_L \overline{M}\alpha_t \frac{\Delta t_1}{h}ds - \sum_r \left(\overline{R}_{rx}u_r + \overline{R}_{rz}w_r + \overline{M}_r\varphi_r\right)$$

Vzhledem k zanedbání práce posouvajících sil se použije pouze třetí integrál, který je možné zapsat ve tvaru

$$\delta_{i,j} = \int_L \frac{M_i M_j}{EI}dx,$$

kde M_i je funkce momentu od jednotkového zatížení v místě a směru hledaného přemístění a M_j je moment od zatížení způsobujícího hledaného přemístění. Pro vyčíslení integrálů je možné využívat tabulky, Vereščaginovo pravidlo nebo přímou integraci.

Obecný tvar deformační podmínky pak je

$$\delta_i = \delta_{i,0} + \sum_{j=1}^{n} X_j \delta_{i,j} = \overline{\delta}_i$$

kde

δ_i je celkový posun ve směru i-té neznáme síly

$\delta_{i,0}$ je posun ve směru i-té neznáme způsobený původním zatížením

X_j je j-tá neznámá síla

$\delta_{i,j}$ je celkový posun ve směru i-té neznáme síly způsobení jednotkovou silou ve směru j-té neznámé síly

$\overline{\delta}_i$ je předepsaný posun ve směru i-té neznáme (obvykle nulový)

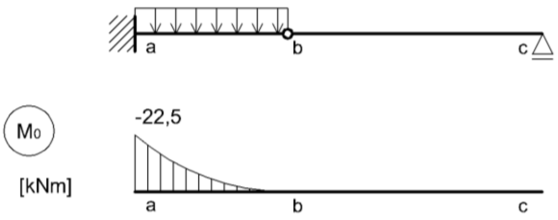
n je počet neznámých sil X_i

Je tedy třeba určit průběhy ohybových momentů od vlastního zatížení M_0 a od jednotkového impulsu v místě a směru hledaného přemístění M_1.

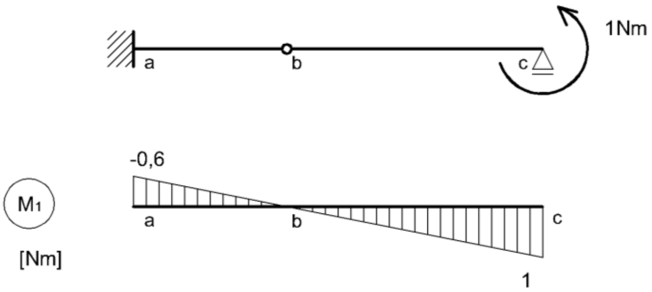
a) základní soustava vznikne odebráním vnější vazby

Základní staticky určitá soustava (ZS) se vytvoří odebráním vazby proti pootočení v podpoře *c*. Tato vazba se nahradí neznámou reakcí X_1 a podmínkou, kterou tato vazba zajišťovala – podmínkou pro pootočení průřezu v bodě *c*.

$$\delta_1 = \varphi_c = 0$$



Obr. 7.2: Základní staticky určitá soustava zatížená původním zatížením a odpovídající ohybové momenty



Obr. 7.3: Základní staticky určitá soustava zatížená jednotkovým impulsem a odpovídající ohybové momenty

Výpočet přemístění:

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{EI_{ac}}\left[\frac{1}{4}M_{a,0}M_{a,1}L_{ac}\right] = \frac{1}{210\cdot10^9\cdot21{,}4\cdot10^{-6}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-22{,}5\cdot10^3\right)\cdot\left(-0{,}6\right)\cdot3 = 2{,}253\cdot10^{-3}$$

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI_{ac}}\left[\frac{1}{3}M_{a,1}M_{a,1}L_{ac}\right] + \frac{1}{EI_{cb}}\left[\frac{1}{3}M_{b,1}M_{b,1}L_{cb}\right]$$

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{210\cdot10^9\cdot21{,}4\cdot10^{-6}}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\left(-0{,}6\right)\cdot\left(-0{,}6\right)\cdot3\right]\frac{1}{210\cdot10^9\cdot97{,}9\cdot10^{-6}}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\left(-1\right)\cdot\left(-1\right)\cdot5\right] = 1{,}61174\cdot10^{-7}$$

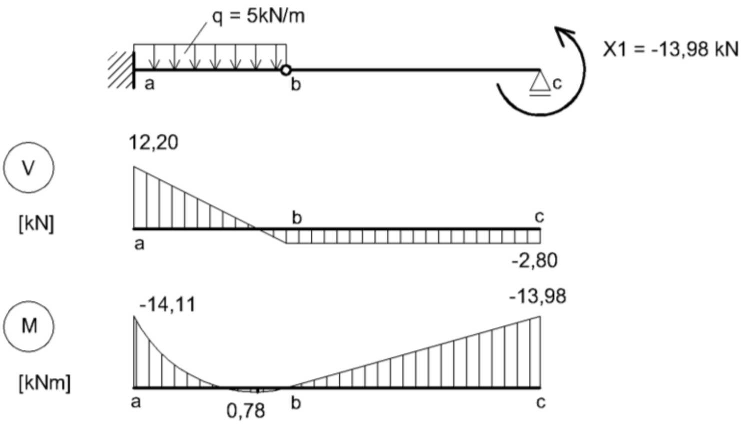
Kanonická rovnice:

$$\delta_{1,0} + \delta_{1,1}X_1 = 0$$

$$2{,}253\cdot10^{-3} + 1{,}61174\cdot10^{-7}X_1 = 0$$

Řešení:

$$X_1 = -13979 = -13{,}979 kN$$



Obr. 7.4: Zatížení ZS a výsledné průběhy posouvajících sil a momentů

b) základní soustava vznikne odebráním vnitřní vazby

Základní staticky určitá soustava se vytvoří odebráním vazba zajišťující nulový vzájemný posun konců prutů v kloubu *b*. Vazba se nahradí reakcí vnitřní vazby silou X_1, která působí opačně na oba konce prutů, podobně jako posouvající síla.

Deformační podmínka představuje rovnost průhybu v levé a pravé části v místě kloubu.

$$w_c^L = w_c^P$$

Vzhledem k opačnému působení reakce na oba konce prutů svislé posuny zleva a zprava bodu *b* můžeme vyjádřit

$\delta^L = w^L$ ... směřuje dolů

$\delta^P = -w^P$ ... směřuje nahoru

po dosazení do první rovnice dostaneme

$$\delta^L + \delta^P = \delta = 0$$

Rovnice vyjadřuje, že vzájemný posun obou konců prutů je nulový a není nutné rozdělovat konstrukci na levou a pravou část při integraci přemístění. Pro názornost toto rozdělení bude provedeno.

Posun na levé části je dán vlivem zatížení a reakce X_1.

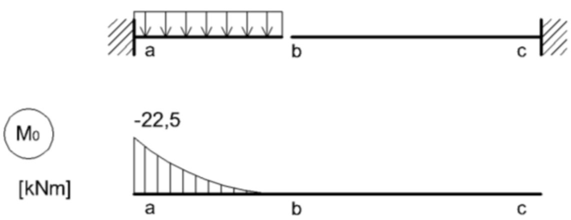
$$\delta^L = \delta_{1,0}^L + \delta_{1,1}^L X_1$$

Obdobně posun na pravé části

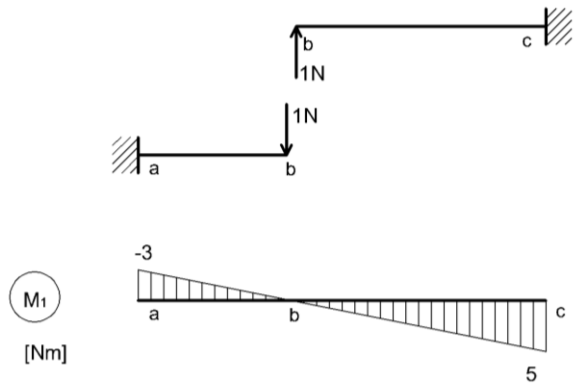
$$\delta^P = \delta_{1,0}^P + \delta_{1,1}^P X_1$$

Po dosazení se získá kanonická rovnice pro určení neznámé síly X_1.

$$\delta_{1,0}^L + \delta_{1,0}^P + \left(\delta_{1,1}^L + \delta_{1,1}^P\right) X_1 = 0$$



Obr. 7.5: Základní staticky určitá soustava zatížená původním zatížením a odpovídající ohybové momenty



Obr. 7.6: Základní staticky určitá soustava zatížená jednotkovým impulsem a odpovídající ohybové momenty

Výpočet přemístění

$$\delta_{1,0}^{L} = \frac{1}{EI_{ac}}\left[\frac{1}{4}M_{a,0}M_{a,1}L_{ac}\right] = \frac{1}{210\cdot 10^{9}\cdot 21{,}4\cdot 10^{-6}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-22{,}5\cdot 10^{3}\right)\cdot(-3)\cdot 3 = 0{,}0127$$

$$\delta_{1,0}^{P} = 0$$

$$\delta_{1,1}^{L} = \frac{1}{EI_{ac}}\left[\frac{1}{3}M_{a,1}M_{a,1}L_{ac}\right] = \frac{1}{210\cdot 10^{9}\cdot 21{,}4\cdot 10^{-6}}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot 3\right] = 2{,}00267.10^{-6}$$

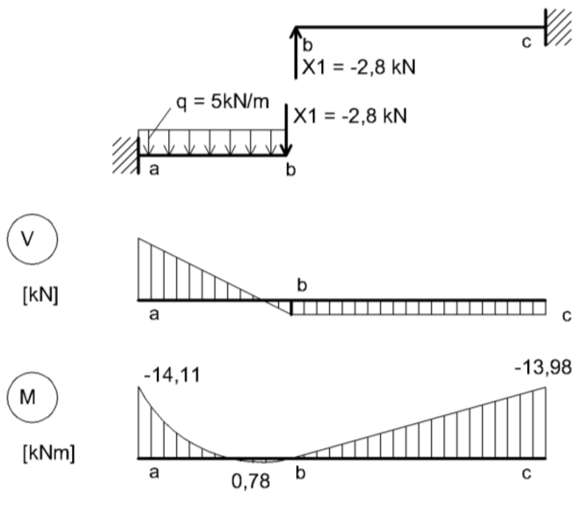
$$\delta_{1,1}^{P} = \frac{1}{EI_{cb}}\left[\frac{1}{3}M_{b,1}M_{b,1}L_{cb}\right] = \frac{1}{210\cdot 10^{9}\cdot 97{,}9\cdot 10^{-6}}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 5\cdot 5\cdot 5\right] = 2{,}0026710^{-6}$$

Kanonická rovnice

$$\delta_{1,0}^{L} + \delta_{1,0}^{P} + \left(\delta_{1,1}^{L} + \delta_{1,1}^{P}\right)X_1 = 0$$

Řešení

$$X_1 = -2796N = -2{,}796kN$$



Obr. 7.7: Zatížení ZS a výsledné průběhy posouvajících sil a momentů